Ramki 1 do 83

Program 1

Numeryczne rozwiązywanie równań i interpolacja

Czego nauczę się z tego programu?

Po ukończeniu tego programu będziesz potrafił:

- □ zrozumieć znaczenie zasadniczego twierdzenia algebry;
- □ znaleźć oba pierwiastki równania kwadratowego i zrozumieć, że pierwiastki zespolone równań wielomianowych o współczynnikach rzeczywistych występują w parach wzajemnie sprzężonych;
- □ wykorzystywać związki między współczynnikami a pierwiastkami równań wielomianowych do znajdowania pierwiastków wielomianów;
- □ przekształcić równanie sześcienne do postaci zredukowanej;
- □ stosować metodę Tartaglii do znajdowania pierwiastków równań sześciennych;
- □ rozwiązywać równania postaci $f(x) = 0$ metodą połowienia;
- □ rozwiązywać równania z jedną niewiadomą rzeczywistą przez iterację oraz używać arkusza kalkulacyjnego w celu przyspieszenia obliczeń;
- □ rozwiązywać równania metodą iteracyjną Newtona-Raphsona;
- □ stosować zmodyfikowaną metodę Newtona-Raphsona do znajdowania pierwszego przybliżenia, w przypadku gdy pochodna jest mała;
- □ rozumieć znaczenie interpolacji oraz stosować interpolację liniową i graficzną w prostych przypadkach;
- □ stosować wzór interpolacyjny Gregory'ego-Newtona z różnicami progresywnymi i wstecznymi dla węzłów równo rozmieszczonych;
- □ stosować wzory interpolacyjne Gaussa z różnicami centralnymi dla węzłów równo rozmieszczonych;
- □ stosować interpolację Lagrange'a, w przypadku gdy węzły nie są równo rozmieszczone.

Wprowadzenie

1

W tym programie przyjrzymy się analitycznym i numerycznym metodom rozwiązywania równania z jedną niewiadomą, czyli równania o postaci $f(x) = 0$. Ponadto zobaczymy, że zależność funkcyjną można wyrazić w postaci zbioru uporządkowanych par liczb zamiast w postaci wyrażenia algebraicznego. Przyjrzymy się interpolacyjnym metodom szacowania wartości $f(x)$ dla wartości pośrednich x, nie występujących na liście par uporządkowanych.

Na początku spojrzymy na **zasadnicze twierdzenie algebry**, które dotyczy rozkładu wielomianów na czynniki.

Zasadnicze twierdzenie algebry

2

Zasadnicze twierdzenie algebry formułuje się w następujący sposób:

Każdy wielomian $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ można przedstawić w postaci iloczynu n czynników liniowych w postaci

$$f(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(\cdots)(x - r_n).$$

Wynika z niego bezpośrednio, że istnieje n wartości x spełniających równanie wielomianowe $f(x) = 0$, tzn. $x = r_1, x = r_2, \ldots, x = r_n$. Nazywamy je *pierwiastkami wielomianu*. Weź jednak pod uwagę, że nie muszą one być wzajemnie różne. Co więcej, współczynniki a_i oraz pierwiastki r_i wielomianu mogą być rzeczywiste, czysto urojone lub zespolone.

Dla przykładu, równanie kwadratowe:

$x^2 + 5x + 6 = 0$ można zapisać jako $(x + 2)(x + 3) = 0$, więc ma ono dwa *różne* pierwiastki $x = -2$ oraz $x = -3$;

$x^2 - 4x + 4 = 0$ można zapisać jako $(x - 2)(x - 2) = 0$, więc ma ono dwa *identyczne* pierwiastki $x = 2$ oraz $x = 2$;

$x^2 + x + 1 = 0$ można zapisać jako $(x + a)(x + b) = 0$, więc ma ono dwa pierwiastki $x = -a$ oraz $x = -b$.

Aby znaleźć wartości liczbowe pierwiastków a, b, musimy zastosować wzory na pierwiastki ogólnego równania kwadratowego. Czy pamiętasz, jak one wyglądają? Jeśli nie, spójrz na ramkę 2 w programie F.6 „Matematyki od zera dla inżyniera” (wydanie VIII).

Rozwiązanie równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ ma postać . . . .

Odpowiedź znajdziesz w następnej ramce.

3

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Dlatego pierwiastkami równania $x^2 + x + 1 = 0$ są . . . .

Przejdź do kolejnej ramki.

4

$$\boxed{x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

Ponieważ

$$a=b=c=1,\text{ zatem } x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

To równanie kwadratowe ma dwa różne rozwiązania *zespolone*. Zauważ, że stanowią one *parę wzajemnie sprzężoną* – jeden jest sprzężeniem drugiego.

Jeśli wielomian *o współczynnikach rzeczywistych* $\boldsymbol{a_i}$ ma pierwiastek zespolony, to jego sprzężenie też jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Dlatego jeśli $x=-2+\sqrt{5}i$ jest jednym z pierwiastków równania kwadratowego o współczynnikach rzeczywistych, to drugim pierwiastkiem jest . . . .

5

$$\boxed{x=-2-\sqrt{5}i}$$

Ponieważ

sprzężeniem $x=-2+\sqrt{5}i$ jest $x=-2-\sqrt{5}i$, a pierwiastki zespolone równania wielomianowego o współczynnikach rzeczywistych zawsze występują w parach wzajemnie sprzężonych.

Równaniem kwadratowym z tymi dwoma pierwiastkami jest . . . .

6

$$\boxed{x^2+4x+9=0}$$

Ponieważ

jeśli $x=a$ oraz $x=b$ są pierwiastkami równania kwadratowego, to tym równaniem kwadratowym jest $(x-a)(x-b)=0$. Oznacza to, że $(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab=0$.

Tutaj tymi dwoma pierwiastkami są $x=-2+\sqrt{5}i$ oraz $x=-2-\sqrt{5}i$, skąd

$$\left(x-\left(-2+\sqrt{5}i\right)\right)\left(x-\left(-2-\sqrt{5}i\right)\right)=0.$$

Oznacza to, że $x^2-x\left(-2+\sqrt{5}i-2-\sqrt{5}i\right)+\left(-2+\sqrt{5}i\right)\left(-2-\sqrt{5}i\right)=0$, dlatego $x^2+4x+9=0$.

Zauważ, że współczynniki tego równania są . . . .

7

$\boxed{\text{rzeczywiste}}$

Związki między współczynnikami a pierwiastkami równania wielomianowego

Niech α, β, γ będą pierwiastkami równania $px^3 + qx^2 + rx + s = 0$. Zapisując wyrażenie $px^3 + qx^2 + rx + s$ w zależności od α, β, γ, otrzymujemy

$$px^3 + qx^2 + rx + s = p\left(x^3 + \frac{q}{p}x^2 + \frac{r}{p}x + \frac{s}{p}\right)$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots$$

8

$\boxed{p(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$

Stąd:

$$\begin{aligned} px^3 + qx^2 + rx + s &= p\left(x^3 + \frac{q}{p}x^2 + \frac{r}{p}x + \frac{s}{p}\right) \\ &= p(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \\ &= p\big(x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\big)(x-\gamma) \\ &= p\big(x^3 - (\alpha+\beta)x^2 + \alpha\beta x - \gamma x^2 + (\alpha+\beta)\gamma x - \alpha\beta\gamma\big) \\ &= p\big(x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)\,x - \alpha\beta\gamma\big). \end{aligned}$$

Porównujemy współczynniki:

(a) $\alpha + \beta + \gamma = \ldots\ldots\ldots\ldots$;
(b) $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \ldots\ldots\ldots\ldots$;
(c) $\alpha\beta\gamma = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

9

$\boxed{\text{(a)}\ -\frac{q}{p};\quad \text{(b)}\ \frac{r}{p};\quad \text{(c)}\ -\frac{s}{p}}$

Wszystkie te rozważania dotyczyły równania sześciennego. Rozszerzymy je teraz na przypadek ogólniejszego równania.

Przejdźmy więc do następnej ramki.

10

Ogólnie, jeśli $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ są pierwiastkami równania

$$p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0 \quad (p_0 \neq 0),$$

to:

suma pierwiastków $= -\dfrac{p_1}{p_0}$;

suma iloczynów pierwiastków, po dwa naraz $= \dfrac{p_2}{p_0}$;

suma iloczynów pierwiastków, po trzy naraz $= -\dfrac{p_3}{p_0}$;

suma iloczynów pierwiastków, po n naraz $= (-1)^n \cdot \dfrac{p_n}{p_0}$.

Dlatego jeśli $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ są pierwiastkami równania $3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 7x - 4 = 0$, to:

(a) $\alpha + \beta + \gamma + \delta =$ . . . . ;

(b) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\alpha + \delta\beta + \gamma\alpha =$ . . . . ;

(c) $\alpha\beta\gamma + \beta\gamma\delta + \gamma\delta\alpha + \alpha\beta\delta =$ . . . . ;

(d) $\alpha\beta\gamma\delta =$ . . . .

11

(a) $-\frac{2}{3}$; (b) $\frac{5}{3}$; (c) $-\frac{7}{3}$; (d) $-\frac{4}{3}$

Przejdźmy do trzech przykładów dotyczących tego zagadnienia.

Przykład 1

Rozwiąż równanie $x^3 - 8x^2 + 9x + 18 = 0$, wiedząc, że suma dwóch jego pierwiastków wynosi 5.

Postępując podobnie jak poprzednio, jeśli α, β, γ są pierwiastkami, to:

(a) $\alpha + \beta + \gamma =$ . . . . ;

(b) $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma =$ . . . . ;

(c) $\alpha\beta\gamma =$ . . . .

12

(a) 8; (b) 9; (c) -18

Tak więc mamy $\alpha + \beta + \gamma = 8$. Niech $\alpha + \beta = 5$.

$\therefore\ 5 + \gamma = 8 \quad \therefore\ \gamma = 3$

Mamy też: $\alpha\beta\gamma = -18 \quad \alpha\beta(3) = -18 \quad \therefore\ \alpha\beta = -6$

$\alpha + \beta = 5 \quad \therefore\ \beta = 5 - \alpha \quad \therefore\ \alpha(5 - \alpha) = -6$

$\alpha^2 - 5\alpha - 6 = 0 \quad \therefore\ (\alpha - 6)(\alpha + 1) = 0 \qquad \therefore\ \alpha = -1$ lub 6

$\therefore\ \beta = 6$ lub -1

Pierwiastkami równania są $x = -1, 3, 6$.

13

Przykład 2

Rozwiąż równanie $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6 = 0$, wiedząc, że jego trzy pierwiastki tworzą ciąg arytmetyczny.

Zapiszmy te pierwiastki jako $a - k, a, a + k$.

Wtedy suma pierwiastków to $3a =$ . . . .

oraz ich iloczyn to $a(a - k)(a + k) =$ . . . .

14

$$\boxed{3a = -\frac{3}{2}; \quad a(a+k)(a-k) = \frac{6}{2} = 3}$$

$$\therefore \; a = -\frac{1}{2} \qquad -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - k^2\right) = 3 \qquad \therefore \; k = \pm\frac{5}{2}$$

Jeśli $k = \frac{5}{2}$ i $a = -\frac{1}{2}$, to $a - k = -3$ i $a + k = \;\; 2$.

Jeśli $k = -\frac{5}{2}$ i $a = -\frac{1}{2}$, to $a - k = \;\; 2$ i $a + k = -3$.

$\therefore$ Szukanymi pierwiastkami są $-3, -\frac{1}{2}, 2$.

Poniżej podobny przykład.

Przykład 3

Rozwiąż równanie $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$, wiedząc, że jego trzy pierwiastki tworzą ciąg geometryczny.

Tym razem zapiszmy pierwiastki jako $\frac{a}{k}, a, ak$.

Wtedy $\frac{a}{k} + a + ak =$ .... oraz $\left(\frac{a}{k}\right)(a)(ak) =$ ....

15

$$\boxed{\text{suma pierwiastków wynosi } -3; \quad \text{iloczyn pierwiastków wynosi } 8}$$

Wynika stąd, że pierwiastkami są ...., ..., ...

16

$$\boxed{-4, \quad 2, \quad -1}$$

Rozwiązanie poprzednich przykładów opiera się na związkach między pierwiastkami a współczynnikami, tzn. jeśli α, β, γ są pierwiastkami równania sześciennego

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

to:

(a) $\alpha + \beta + \gamma =$ ....;

(b) $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma =$ ....;

(c) $\alpha\beta\gamma =$ ....

17

$$\boxed{\text{(a)} \; -\frac{b}{a}; \quad \text{(b)} \; \frac{c}{a}; \quad \text{(c)} \; -\frac{d}{a}}$$

W każdym z tych trzech przykładów odtwórz równania sześcienne, aby przekonać się, że są one poprawne.

Czas na kolejny etap.

Równania sześcienne

18

Zasadnicze twierdzenie algebry mówi nam, że każdą funkcję sześcienną

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

można przedstawić jako iloczyn trzech czynników liniowych

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3).$$

Wynika stąd, że każde równanie sześcienne

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = 0$$

ma trzy pierwiastki, które mogą być wzajemnie różne lub mogą się powtarzać. Mogą też być rzeczywiste albo zespolone. Jednakże, ponieważ pierwiastki zespolone wielomianu o współczynnikach rzeczywistych występują w parach wzajemnie sprzężonych, można powiedzieć, że takie równanie sześcienne ma

co najmniej jeden ....

19

pierwiastek rzeczywisty

W celu znalezienia tego pierwiastka można skorzystać ze wzoru analogicznego do wzoru służącego do znajdowania pierwiastków ogólnego równania kwadratowego. Ten sposób zwany jest metodą Tartaglii. Jednak zanim przejdziemy do jej omówienia, musimy nauczyć się, jak przekształcić ogólne równanie sześcienne do jego **postaci zredukowanej**.

20

Przekształcanie równania sześciennego do postaci zredukowanej

Każde równanie postaci

$$y^3 + py^2 + qy + r = 0$$

można doprowadzić do postaci zredukowanej $x^3 + ax + b = 0$ przez podstawienie $y = x - \frac{p}{3}$.

Poniższy przykład pokaże tę metodę.

Przykład 4

Zapisz równanie $y^3 + 3y^2 + 5y + 8 = 0$ w postaci zredukowanej.

Podstawiamy $y = x - \frac{p}{3} = x - \frac{3}{3} = x - 1$. Równanie przyjmuje postać

$$(x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 5(x-1) + 8 = 0$$
$$(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 3(x^2 - 2x + 1) + 5(x-1) + 8 = 0.$$

Po uproszczeniu otrzymujemy ....

21

$$\boxed{x^3 + 2x + 5 = 0}$$

Metoda Tartaglii dla pierwiastka rzeczywistego

W XVI wieku Tartaglia odkrył, że pierwiastek równania sześciennego $x^3 + ax + b = 0$, gdzie $a > 0$, dany jest wzorem

$$x = \left(-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}\right)^{1/3} + \left(-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}\right)^{1/3}.$$

Wygląda to dość groźnie, ale jest dużo łatwiejsze niż się wydaje. Zauważ, że $\frac{b}{2}$ oraz $\sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}$ pojawiają się dwukrotnie, więc jest bardzo wygodnie obliczyć je na samym początku, a dopiero potem podstawić do powyższego wzoru.

Przykład 5

Znajdź pierwiastek rzeczywisty równania $x^3 + 2x + 5 = 0$.

Tutaj $a = 2,\ b = 5.$ $\quad\therefore\ \frac{b}{2} = 2{,}5$

$$\sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}} = \sqrt{\frac{8}{27} + \frac{25}{4}} = \sqrt{6{,}5463} = 2{,}5586$$

Dlatego $x = (-2{,}5 + 2{,}5586)^{1/3} + (-2{,}5 - 2{,}5586)^{1/3}$

$= 0{,}3884 - 1{,}7166 = -1{,}3282, \qquad x = -1{,}328.$

Gdy mamy już pierwiastek rzeczywisty, równanie sześcienne można zredukować do równania kwadratowego i wyznaczyć pozostałe dwa pierwiastki: $x = 0{,}664 + 1{,}823i$ oraz $x = 0{,}664 - 1{,}823i$ (zob. „Matematyka od zera dla inżyniera", wydanie VIII, program F.6).

Przykład 6

Znajdź pierwiastek rzeczywisty równania $2x^3 + 3x - 4 = 0$.

Najpierw dzielimy obie strony równania przez 2: $x^3 + 1{,}5x - 2 = 0 \ \therefore\ a = 1{,}5, b = -2.$

Teraz wyznaczamy $\frac{b}{2}$ oraz $\sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}$ i obliczamy

$x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

22

$$\boxed{0{,}8796}$$

Ponieważ:

$$\left(-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}\right)^{1/3} = (2{,}06066)^{1/3} = 1{,}2725 \text{ oraz}$$

$$\left(-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}\right)^{1/3} = (-0{,}06066)^{1/3} = -0{,}3929,$$

skąd $x = 1{,}2725 - 0{,}3929 = 0{,}8796.$

Uwaga: Jeśli chcemy znaleźć pierwiastek rzeczywisty równania $x^3 + ax + b = 0$, gdzie $a < 0$, najlepiej uciec się do metod numerycznych. Przeczytasz o nich dalej.

Przejdź do kolejnej ramki.

Metody numeryczne

Metody, których używaliśmy dotychczas do rozwiązywania równań kwadratowych czy też do znajdowania pierwiastków rzeczywistych równań sześciennych, nazywamy *analitycznymi*. Do otrzymania rozwiązań używamy w nich prostych technik algebraicznych. Wartości liczbowe tych rozwiązań można wyznaczyć przez wstawienie wartości liczbowych w wyprowadzonych wzorach. Niestety, nie każde równanie wielomianowe stopnia piątego lub wyższego można rozwiązać metodami analitycznymi. Zamiast nich musimy uciec się do czegoś, co nazywa się *metodami numerycznymi*. Najprostszą metodą numeryczną do znajdowania rozwiązania równania postaci $f(x) = 0$ jest *metoda połowienia*.

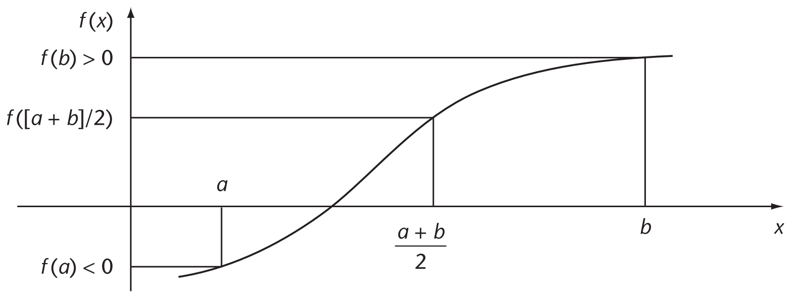
Metoda połowienia

Rozwiązanie równania $f(x) = 0$ metodą połowienia polega na:

znalezieniu takiej wartości x (oznaczmy ją $x = a$), dla której $f(a) < 0$;

znalezieniu takiej wartości x (oznaczmy ją $x = b$), dla której $f(b) > 0$.

Rozwiązanie równania $f(x) = 0$ musi leżeć między a i b. Co więcej, musi leżeć albo w pierwszej połowie przedziału o końcach a, b, albo w jego drugiej połowie.



Teraz obliczamy wartość $f\left((a+b)/2\right)$, czyli wartość funkcji f dla argumentu x leżącego dokładnie w połowie pomiędzy a oraz b.

Jeśli $f\left((a+b)/2\right) > 0$, to rozwiązanie leży w pierwszej połowie. Jeśli natomiast $f\left((a+b)/2\right) < 0$, to rozwiązanie leży w drugiej połowie. Tę procedurę powtarzamy, na każdym kroku dwukrotnie zawężając długość przedziału, w którym poszukujemy rozwiązania. Wszystko wyjaśni przykład.

Przykład 7

Znajdź dodatnie rozwiązanie równania $x^2 - 2 = 0$.

Najpierw zauważamy, że jeśli $x = 1$, to $x^2 - 2 < 0$ oraz jeśli $x = 2$, to $x^2 - 2 > 0$.

Dlatego szukane rozwiązanie leży pomiędzy 1 a 2.

Poszukujemy . . . .

24

$\boxed{\text{środka pomiędzy 1 a 2, czyli 1,5.}}$

Jeśli $x = 1{,}5$, to $x^2 - 2 = 0{,}25 > 0$,

dlatego rozwiązanie musi leżeć pomiędzy ....

25

$\boxed{1 \text{ a } 1{,}5}$

Środkiem pomiędzy 1 a 1,5 jest 1,25. Jeśli $x = 1{,}25$, to $x^2 - 2 = -0{,}4375 < 0$,

dlatego rozwiązanie musi leżeć pomiędzy ....

26

$\boxed{1{,}25 \text{ a } 1{,}5}$

Środkiem pomiędzy 1,25 a 1,5 jest 1,375. Obliczamy dla niego wartość wyrażenia $x^2 - 2$ i określamy, w której połowie przedziału leży rozwiązanie. Kontynuujemy ten proces. Jego wyniki pokazuje poniższa tabela. Składa się ona z bloków po sześć liczb zgrupowanych w dwóch kolumnach. Pierwsza z nich zawiera końce przedziału i jego punkt środkowy. Druga zaś zawiera odpowiadające im wartości wyrażenia $f(x) = x^2 - 2$. Tabelę sporządzamy w następujący sposób:

(a) W każdym bloku sześciu liczb kopiujemy ostatnią liczbę z pierwszej kolumny na drugie miejsce w pierwszej kolumnie następnego bloku. Jest to środek poprzedniego przedziału.

(b) W każdym bloku sześciu liczb kopiujemy z pierwszej kolumny liczbę reprezentującą drugi koniec nowego przedziału na pierwsze miejsce w pierwszej kolumnie następnego bloku. Aby zdecydować, którą liczbę skopiować, patrzymy na znaki w drugiej kolumnie.

a	1,0000	−1,0000	1,0000	−1,0000	1,5000	0,2500	1,5000	0,2500
b	2,0000	2,0000	1,5000	0,2500	1,2500	−0,4375	1,3750	−0,1094
$(a+b)/2$	1,5000	0,2500	1,2500	−0,4375	1,3750	−0,1094	1,4375	0,0664
a	1,3750	−0,1094	1,4375	0,0664	1,4063	−0,0225	1,4219	0,0217
b	1,4375	0,0664	1,4063	−0,0225	1,4219	0,0217	1,4141	−0,0004
$(a+b)/2$	1,4063	−0,0225	1,4219	0,0217	1,4141	−0,0004	1,4180	0,0106
a	1,4141	−0,0004	1,4141	−0,0004	1,4141	−0,0004	1,4141	−0,0004
b	1,4180	0,0106	1,4160	0,0051	1,4150	0,0023	1,4146	0,0010
$(a+b)/2$	1,4160	0,0051	1,4150	0,0023	1,4146	0,0010	1,4143	0,0003
a	1,4141	−0,0004	1,4143	0,0003	1,4142	−0,0001		
b	1,4143	0,0003	1,4142	−0,0001	1,4142	0,0001		
$(a+b)/2$	1,4142	−0,0001	1,4142	0,0001	1,4142	0,0000		

Końcowym wynikiem z dokładnością do czterech miejsc po przecinku jest $x = 1{,}4142$ i jest to poprawna odpowiedź na tym poziomie dokładności. Jednak jej otrzymanie wymagało dużego nakładu pracy. Znacznie szybszym sposobem rozwiązania tego równania jest zastosowanie wzoru iteracyjnego wprowadzonego przez Newtona.

Przejdź do kolejnej ramki.

Numeryczne rozwiązywanie równań przez iterację

27

Proces numerycznego rozwiązywania równania

$$f(x) = 0$$

przez iterację polega na znalezieniu przybliżonego rozwiązania, którego następnie używa się do otrzymania rozwiązania dokładniejszego. Tę procedurę powtarzamy aż do momentu, w którym znalezione rozwiązanie osiągnie żądaną dokładność. Dla przykładu, Newton pokazał, że wartość $\sqrt{2}$ można wyznaczyć w procesie zwanym *iteracją*. Jeśli $x^2 = 2$, to $2x^2 = x^2 + 2$ i po podzieleniu obu stron przez $2x$ dochodzimy do

$$x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}.$$

Jeśli użyjemy przybliżonej wartości $\sqrt{2}$ do wyznaczenia prawej strony tego równania, otrzymujemy lepsze przybliżenie $\sqrt{2}$. Znów używamy go do obliczenia prawej strony, dostając jeszcze lepsze przybliżenie $\sqrt{2}$. Powtarzamy tę procedurę aż otrzymane przybliżenie osiągnie żądaną dokładność. Jest to metoda iteracyjna, a opisuje ją wzór

$$x_{i+1} = \frac{x_i}{2} + \frac{1}{x_i} \qquad i = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

gdzie x_0 jest początkowym przybliżeniem, od którego rozpoczynamy iterację. Aby znaleźć kolejne przybliżenia $\sqrt{2}$ (każde z coraz to większą dokładnością), postępujemy w następujący sposób. Niech $x_0 = 1{,}5$ będzie przybliżeniem znalezionym w pierwszym kroku metody połowienia. Wtedy

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{2}{x_0}\right) = 0{,}5(1{,}5 + 2/1{,}5) = 1{,}4166\ldots.$$

Tej wartości użyjemy do znalezienia x_2.

Zaokrąglając x_1 do 1,4167, znajdujemy $x_2 =$ . . . .

28

$$\boxed{x_2 = 1{,}4142}$$

Ponieważ

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) = 0{,}5(1{,}4167 + 2/1{,}4167) = 1{,}4142\ldots.$$

Osiągnęliśmy tę samą dokładność jak w metodzie połowienia już w drugim kroku.

Zastosowanie arkusza kalkulacyjnego

Tę prostą procedurę iteracyjną możemy w bardziej efektywny sposób wykonać, używając arkusza kalkulacyjnego. Jeśli go nigdy nie używałeś, spójrz do programu F.4 „Matematyki od zera dla inżyniera" (wydanie VIII), gdzie stosuje się arkusz kalkulacyjny do rysowania wykresów funkcji. Jeśli masz podstawową wiedzę dotyczącą używania arkusza kalkulacyjnego, będziesz w stanie prześledzić zawarty tu materiał. Będziemy używać arkusza kalkulacyjnego *Microsoft Excel*, aczkolwiek wszystkie arkusze kalkulacyjne posiadają porównywalne możliwości.

Otwórz arkusz i w komórce A1 wpisz *n*, a następnie naciśnij **Enter**. W pierwszej kolumnie umieścimy numery kolejnych iteracji. W komórce A2 wpisz 0 i naciśnij **Enter**. Przejdź do komórki A2 i zaznacz blok komórek od A2 do A7, przeciągając myszkę z wciśniętym lewym przyciskiem aż do A7. W menu **Edycja** na pasku komend kliknij **Wypełnienie**, a później **Seria danych** i zaakceptuj standardową **wartość kroku** 1, klikając OK w oknie, które się pojawi.

Komórki od A3 do A7 będą zawierać . . . .

29

liczby od 1 do 5

W komórce B1 wpisz *x* – ta kolumna będzie zawierać kolejne wartości *x* otrzymane w procesie iteracji. W komórce B2 wpisz wartość x_0, czyli 1,5.
W komórce B3 wpisz formułę
= 0,5(B2+2/B2).

W komórce B3 pojawia się liczba . . . .

30

1,41666667

Przejdź do komórki B3 i skopiuj jej zawartość do schowka (np. przez naciśnięcie kombinacji klawiszy Ctrl C). Podświetl komórki od B3 do B7 i wklej do nich zawartość schowka (np. przez naciśnięcie kombinacji klawiszy Ctrl V).

Komórki od B4 do B7 wypełnią się liczbami i zobaczymy

. . . .

31

n	*x*
0	1,5
1	1,41666667
2	1,41421569
3	1,41421356
4	1,41421356
5	1,41421356

Możemy teraz sformatować arkusz, aby uzyskać wygląd podobny do poniższego.

n	*x*
0	1,500000000000000
1	1,416666666666670
2	1,414215686274510
3	1,414213562374690
4	1,414213562373090
5	1,414213562373090

Liczbę cyfr po przecinku ustawiono tu na 15, czyli znacznie więcej niż potrzeba. Chodziło jednak o zaprezentowanie efektywności arkusza kalkulacyjnego.

Zauważ, że aby uzyskać przybliżenie z dokładnością do zadanej liczby cyfr po przecinku (lub cyfr znaczących), wystarczy kontynuować iterację do momentu, kiedy odpowiednie cyfry nie zmieniają się w kolejnych iteracjach.

Zapisz swój arkusz, nadając mu odpowiednią nazwę, jak np. *Newton*, ponieważ będzie on jeszcze potrzebny.

Teraz przyjrzymy się temu arkuszowi nieco dokładniej.

Adresy względne

32

Przejdź do komórki B3, która zawiera formułę = 0,5(B2+2/B2). Teraz przejdź do komórki B4, która zawiera formułę = 0,5(B3+2/B3). Skąd wynika różnica?

Jeśli wprowadzasz adres B2 do formuły w komórce B3, arkusz rozumie to jako *zawartość komórki, która jest bezpośrednio nad nią*. W tym znaczeniu kopiuje się to do B4, dla której *komórką bezpośrednio nad nią* jest B3. Jeśli chcesz odwołać się do konkretnej komórki arkusza (nie chcąc, aby jej adres był zmieniany przy kopiowaniu), musisz posłużyć się **adresem bezwzględnym**.

Przejdź do komórki C1 i wpisz w niej 2. Teraz przejdź do B3 i edytuj jej formułę do postaci

= 0,5(B2+C1/B2),

a następnie skopiuj ją do komórek od B4 do B7. Liczby w drugiej kolumnie nie zmieniły się, ale formuły już tak, ponieważ w komórkach od B3 do B7 mamy odwołanie do tej samej komórki – C1. *Zastosowanie znaku dolara oznacza użycie adresu bezwzględnego*. Dlaczego to zrobiliśmy?

Zmień teraz liczbę w komórce C1 na 3, a otrzymasz . . . .

33

n	x
0	1,500000000000000
1	1,750000000000000
2	1,732142857142860
3	1,732050810014730
4	1,732050807568880
5	1,732050807568880

Widzimy tu iterowane przybliżenia $\sqrt{3}$, czyli pierwiastka kwadratowego liczby w komórce C1. Możemy teraz użyć naszego arkusza do znalezienia przybliżenia pierwiastka dowolnej liczby dodatniej.

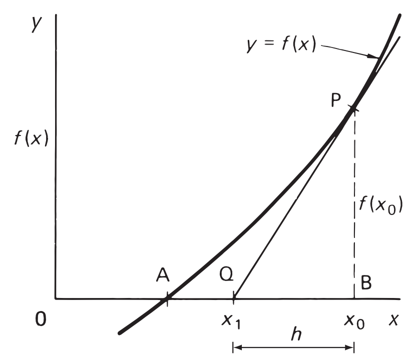
Metoda iteracyjna Newtona znajdowania pierwiastka kwadratowego liczby dodatniej jest przypadkiem szczególnym metody **Newtona-Raphsona** służącej do znajdowania rozwiązania ogólnego równania postaci $f(x) = 0$. W kolejnej ramce rozpoczniemy jej omawianie.

Metoda iteracyjna Newtona-Raphsona[1]

34

Spójrzmy na wykres funkcji $y = f(x)$ po prawej stronie. Współrzędna x punktu A, w którym wykres przecina oś x, stanowi rozwiązanie równania $f(x) = 0$.

Jeśli P jest punktem na krzywej bliskim punktowi A, to $x = x_0$ jest przybliżeniem rozwiązania równania $f(x) = 0$. Błąd tego przybliżenia jest długością odcinka AB.



[1]W literaturze polskojęzycznej ta metoda jest też nazywana metodą stycznych - *przyp. tłum.*

Niech PQ będzie styczną do krzywej w punkcie P, przecinającą oś x w punkcie Q(x_1, 0). Wtedy $x = x_1$ jest lepszym przybliżeniem poszukiwanego rozwiązania.

Patrząc na powyższy rysunek, spostrzegamy, że $\frac{PB}{QB} = \left[\frac{dy}{dx}\right]_P$ jest wartością pochodnej funkcji f w punkcie P, czyli dla $x = x_0$.

$$\therefore \quad \frac{PB}{QB} = f'(x_0) \quad \text{oraz} \quad PB = f(x_0).$$

$$\therefore \quad QB = \frac{PB}{f'(x_0)} = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = h \text{ (Tak oznaczmy tę wartość).}$$

$$x_1 = x_0 - h, \quad \therefore \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Jeśli rozpoczniemy obliczenia od wartości przybliżonej x_0 poszukiwanego rozwiązania, możemy wyznaczyć lepsze przybliżenie x_1. Oczywiście ten proces można powtarzać, aby lepiej przybliżyć wynik. Zobaczmy, jak to działa w praktyce.

Przejdź do kolejnej ramki.

35

Przykład 1

Równanie $x^3 - 3x - 4 = 0$ ma postać $f(x) = 0$. Skoro $f(1) < 0$ oraz $f(3) > 0$, to nasze równanie ma rozwiązanie pomiędzy 1 a 3. Mając na względzie metodę połowienia przedziału, możemy przyjąć pierwsze przybliżenie rozwiązania jako 2. Znajdźmy jego lepsze przybliżenie.

Mamy $f(x) = x^3 - 3x - 4$. $\quad \therefore \; f'(x) = 3x^2 - 3$.

Pierwszym przybliżeniem jest $x_0 = 2$, więc

$$f(x_0) = f(2) = -2 \quad \text{oraz} \quad f'(x_0) = f'(2) = 9.$$

Wyznaczamy lepsze przybliżenie x_1:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^3 - 3x_0 - 4}{3x_0^2 - 3}$$

$$x_1 = 2 - \frac{(-2)}{9} = 2{,}22$$

$$\therefore \quad x_0 = 2; \quad x_1 = 2{,}22.$$

Jeśli teraz rozpoczniemy od x_1, możemy otrzymać lepsze przybliżenie, powtarzając ten proces.

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{x_1^3 - 3x_1 - 4}{3x_1^2 - 3}$$

Otrzymujemy $x_1 = 2{,}22$. $f(x_1) = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $f'(x_1) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

36

$$\boxed{f(x_1) = 0{,}281; \quad f'(x_1) = 11{,}785}$$

Dlatego $x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

37

$$\boxed{x_2 = 2{,}196}$$

Ponieważ

$$x_2 = 2{,}22 - \frac{0{,}281}{11{,}79} = 2{,}196.$$

Zaczynając teraz od $x_2 = 2{,}196$, możemy kontynuować ten proces do czasu, aż w którymś kroku obliczone przybliżenie mieści się w granicach przyjętej przez nas dokładności.

$x_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

38

$$\boxed{x_3 = 2{,}196}$$

Ponieważ:

$$f(x_2) = f(2{,}196) = 0{,}002026; \qquad f'(x_2) = f'(2{,}196) = 11{,}467.$$

$\therefore\ x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2{,}196 - \dfrac{0{,}00203}{11{,}467} = 2{,}196$ z dokładnością do czterech cyfr znaczących.

Ten proces jest prosty, ale efektywny. Można go wciąż powtarzać. Każde powtórzenie – *iteracja* – zwykle daje wynik coraz to bliższy szukanego rozwiązania.

Ogólnie $x_{n+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

39

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Tabelaryczne przedstawienie wyników

Otwórz arkusz kalkulacyjny i w komórkach od A1 do D1 wpisz nagłówki n, x, $f(x)$ oraz $f'(x)$.

Wypełnij komórki od A2 do A6 liczbami od 0 do 4.

W komórce B2 wpisz wartość x_0, czyli 2.

W komórce C2 wpisz formułę na $f(x_0)$, czyli =B2^3 – 3*B2 – 4 i skopiuj ją do komórek od C3 do C6.

W komórce D2 wpisz formułę na $f'(x_0)$, czyli =3*B2^2 – 3 i skopiuj ją do komórek od D3 do D6.

W komórce B3 wpisz formułę na x_1, czyli =B2 – C2/D2 i skopiuj ją do komórek od B4 do B6.

Arkusz powinien wyświetlać ………… (z dokładnością do 6 cyfr po przecinku).

40

n	x	$f(x)$	$f'(x)$
0	2	−2	9
1	2,222222	0,307270	11,814815
2	2,196215	0,004492	11,470081
3	2,195823	0,000001	11,464922
4	2,195823	0,000000	11,464920

Kiedy tylko liczby w drugiej kolumnie zaczną się powtarzać, wiemy, że osiągnęliśmy żądaną dokładność. Stąd szukanym pierwiastkiem równania jest $x = 2{,}195823$ (z dokładnością do sześciu cyfr po przecinku). Teraz zapisz arkusz, aby posłużył Ci jako szablon do rozwiązywania podobnych problemów.

Spójrzmy na kolejny przykład.

Przejdź do kolejnej ramki.

41

Przykład 2

Równanie $x^3 + 2x^2 - 5x - 1 = 0$ ma postać $f(x) = 0$. Skoro $f(1) < 0$ oraz $f(2) > 0$, to ma ono rozwiązanie pomiędzy 1 a 2. Niech jego pierwszym przybliżeniem będzie $x = 1{,}5$. Metodą Newtona-Raphsona znajdziemy rozwiązanie z dokładnością do sześciu cyfr po przecinku.

Skorzystamy z poprzedniego arkusza jako szablonu, robiąc następujące zmiany.

W komórce B2 wpisujemy liczbę ....

42

1,5

Ponieważ
jest to wartość x_0, od której zaczynamy iterację.

W komórce C2 wpisujemy formułę ....

43

=B2^3 + 2*B2^2 – 5*B2 – 1

Ponieważ
jest to wartość $f(x_0) = x_0{}^3 + 2x_0{}^2 - 5x_0 - 1$. Skopiujmy zawartość komórki C2 do komórek od C3 do C5.

W komórce D2 wpisujemy formułę ....

44

=3*B2^2 + 4*B2 – 5

Ponieważ
jest to wartość $f'(x_0) = 3x_0{}^2 + 4x_0 - 5$. Skopiujmy zawartość komórki D2 do komórek od D3 do D5.

W komórce B2 pozostaje identyczna formuła ....

45

=B2 – C2/D2

Ostatecznie widzimy ....

46

n	x	$f(x)$	$f'(x)$
0	1,5	−0,625	7,75
1	1,580645	0,042798	8,817898
2	1,575792	0,000159	8,752524
3	1,575773	0,000000	8,752280
4	1,575773	0,000000	8,752280

Powtarzanie się wartości x przekonuje nas, że $x = 1{,}575773$ jest przybliżeniem rozwiązania z dokładnością do sześciu cyfr po przecinku.

Następny przykład postaraj się zrobić samodzielnie.

Przejdź do kolejnej ramki.

Przykład 3 47

Równanie $2x^3 - 7x^2 - x + 12 = 0$ ma pierwiastek bliski $x = 1{,}5$. Metodą Newtona-Raphsona wyznacz go z dokładnością do sześciu cyfr po przecinku.

Rozwiązaniem otrzymanym w arkuszu kalkulacyjnym jest . . . .

$\boxed{x = 1{,}686141 \text{ z dokładnością do sześciu cyfr po przecinku}}$ 48

Ponieważ:

Wypełnij komórki od A2 do A6 liczbami od 0 do 4.

W komórce B2 wpisz wartość x_0, czyli 1,5.

W komórce C2 wpisz formułę na $f(x_0)$, czyli =2*B2^3 – 7*B2^2 – B2 + 12 oraz skopiuj ją do komórek od C3 do C6.

W komórce D2 wpisz formułę na $f'(x_0)$, czyli = 6*B2^2 – 14*B2 – 1 oraz skopiuj ją do komórek od D3 do D6.

W komórce B3 wpisz formułę na x_1, czyli = B2 – C2/D2 oraz skopiuj ją do komórek od B4 do B6.

Ostatecznie (po sformatowaniu do sześciu cyfr po przecinku) widzimy w arkuszu . . . .

49

n	x	$f(x)$	$f'(x)$
0	1,5	1,5	−8,5
1	1,676471	0,073275	−7,60727
2	1,686103	0,000286	−7,54778
3	1,686141	4,46E-09	−7,54755
4	1,686141	0	−7,54755

W miejscu, w którym liczba w drugiej kolumnie zaczyna się powtarzać, widzimy, że osiągnęliśmy założoną przez nas dokładność. Stąd szukanym pierwiastkiem równania jest $x = 1{,}686141$ (z dokładnością do sześciu cyfr po przecinku).

Pierwsze przybliżenia

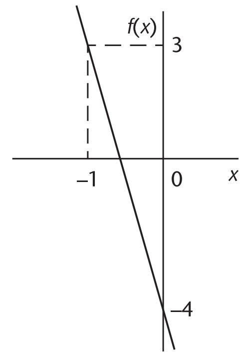
Cała metoda opiera się na znajomości pierwszego przybliżenia szukanego rozwiązania. Jeśli nie mamy wskazówki, można je znaleźć jednym z dwóch sposobów:

(a) stosując twierdzenie o reszcie (zob. twierdzenie Bézouta, program F.3, „Matematyka od zera dla inżyniera",wydanie VIII), jeśli funkcja jest wielomianem;
(b) szkicując wykres funkcji.

Przykład 4

Znajdź pierwiastek rzeczywisty równania $x^3 + 5x^2 - 3x - 4 = 0$ z dokładnością do sześciu cyfr znaczących.

Zastosowanie twierdzenia o reszcie (twierdzenia Bézouta) polega na podstawianiu $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm 2$ itd. do czasu, kiedy wartości wielomianu dla dwóch kolejnych liczb całkowitych mają różne znaki.



$f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 4$

$f(0) = -4$; $f(1) = -1$; $f(-1) = 3$.

Widzimy zmianę znaku dla $f(0)$ oraz $f(-1)$. Dlatego pierwiastek równania leży pomiędzy $x = 0$ a $x = -1$.

Wybieramy więc $x = -0{,}5$ jako pierwsze przybliżenie i postępujemy tak jak powyżej.

Skonstruuj tabelę, aby otrzymać pierwiastek.

$x = \ldots\ldots\ldots\ldots$

50

$\boxed{x = -0{,}675527}$

Tabela utworzona w arkuszu kalkulacyjnym powinna wyglądać tak:

n	x	$f(x)$	$f'(x)$
0	−0,500000	−1,375000	−7,250000
1	−0,689655	0,119070	−8,469679
2	−0,675597	0,000582	−8,386675
3	−0,675527	0,000000	−8,386262
4	−0,675527	0,000000	−8,386262

51

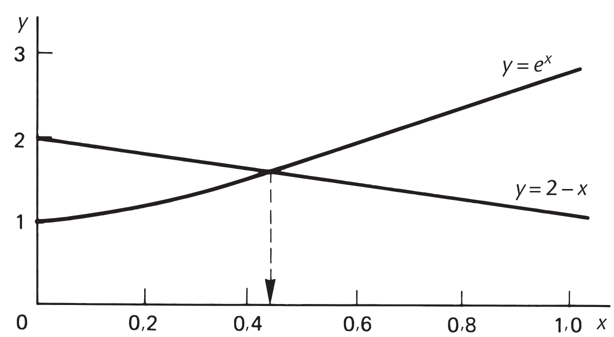
Przykład 5

Rozwiąż równanie $e^x + x - 2 = 0$, podając jego pierwiastek z dokładnością do sześciu cyfr znaczących.

Czasem w celu otrzymania pierwszego przybliżenia szukanego pierwiastka wygodniej jest narysować wykres jednej lub kilku funkcji.

W naszym przypadku równanie można przekształcić do postaci $e^x = 2 - x$ i narysować linie o równaniach $y = e^x$ oraz $y = 2 - x$.

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1
e^x	1,22	1,49	1,82	2,23	2,72
$2 - x$	1,8	1,6	1,4	1,2	1



Możemy zauważyć, że obie linie przecinają się pomiędzy $x = 0{,}4$ a $x = 0{,}6$.

Pierwszym przybliżeniem będzie $x = 0{,}4$.

$$f(x) = e^x + x - 2 \qquad f'(x) = e^x + 1$$

$$x = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dokończmy to.

$$\boxed{x = 0{,}442854}$$ 52

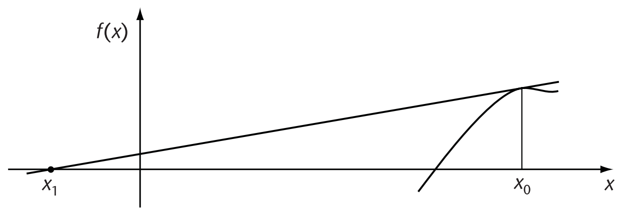
Tabela utworzona w arkuszu kalkulacyjnym powinna wyglądać tak:

n	x	$f(x)$	$f'(x)$
0	0,400000	–0,108175	2,491825
1	0,443412	0,001426	2,558014
2	0,442854	0,000000	2,557146
3	0,442854	0,000000	2,557146

Uwaga: W niektórych przypadkach przybliżenia uzyskane metodą Newtona-Raphsona nie są zbieżne do poszukiwanego rozwiązania równania. Dzieje się tak, kiedy pochodna $f'(x_0)$ jest bardzo mała. Zanim więc zakończymy omawianie tej metody, zbadamy ten problem.

Zmodyfikowana metoda Newtona-Raphsona 53

Jeśli nachylenie krzywej w punkcie $x = x_0$ jest małe, wartość drugiego przybliżenia $x = x_1$ może leżeć dalej od dokładnego rozwiązania niż pierwsze przybliżenie.



Jeśli $x = x_0$ jest pierwszym przybliżeniem rozwiązania równania $f(x) = 0$ oraz $x = x_0 - h$ jest rozwiązaniem dokładnym, to $f(x_0 - h) = 0$. Zapiszmy szereg Taylora:

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) - \ldots = 0.$$

(a) Przypuśćmy, że h jest na tyle małe, że wyrażenia zawierające potęgi h^2 i wyższe możemy pominąć. Wtedy powyższy wzór zapiszemy w postaci

$f(x_0 - h) \approx f(x_0) - hf'(x_0)$, tj. $f(x_0) - hf'(x_0) \approx 0$ i stąd

$h \approx \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, co daje $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ jako lepsze przybliżenie rozwiązania równania $f(x) = 0$.

Tego właśnie używaliśmy poprzednio. Jednak może to nie działać, jeśli pochodna $f'(x)$ jest mała.

Uwaga: h jest dodatnie, chyba że wyrażenia $f(x_0)$ oraz $f'(x_0)$ są przeciwnych znaków.

(b) Rozważmy teraz pierwsze trzy wyrazy szeregu Taylora. Wtedy

$$f(x_0 - h) \approx f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) \approx 0, \text{ czyli}$$

$$2f(x_0) - 2hf'(x_0) + h^2 f''(x_0) \approx 0.$$

Ponieważ wartość pochodnej $f'(x_0)$ jest mała, założymy, że można ją pominąć, więc

$$h = \pm\sqrt{\frac{-2f(x_0)}{f''(x_0)}}.$$

Zatem $h = \sqrt{\frac{-2f(x_0)}{f''(x_0)}}$, chyba że $f(x_0)$ i $f'(x_0)$ są różnych znaków, wtedy $h = -\sqrt{\frac{-2f(x_0)}{f''(x_0)}}$.

Używamy tej metody tylko w przypadku, gdy pochodna $f'(x_0)$ jest bardzo mała. Wyliczając teraz x_1, mając dane x_0, w kolejnych krokach wracamy do standardowej metody $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Zwróć na to uwagę.

54 **Przykład 6**

Wiemy, że równanie $x^3 - 1{,}3x^2 + 0{,}4x - 0{,}03 = 0$ ma pierwiastek blisko $x = 0{,}7$. Znajdź go z dokładnością do sześciu cyfr znaczących.

Zaczynamy jak zwykle.

$$f(x) = x^3 - 1{,}3x^2 + 0{,}4x - 0{,}03$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2{,}6x + 0{,}4$$

I uzupełniamy pierwszy wiersz tabeli.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1} = x_n - h$
0	0,7				

Uzupełnijmy tylko ten pierwszy wiersz wartościami liczbowymi.

55 Mamy:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1} = x_n - h$
0	0,7	–0,044	0,05	–0,88	1,58

Natychmiast zauważamy, że:

(a) wartość x_1 jest daleko od pierwszego przybliżenia (0,7) szukanego pierwiastka;

(b) wartość $f'(x_0)$ jest mała (0,05).

Aby uzyskać x_1, startujemy od nowa, używając zmodyfikowanego wzoru $x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

56

$$\boxed{x_1 = x_0 \pm \sqrt{\frac{-2f(x_0)}{f''(x_0)}}}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 1{,}3x^2 + 0{,}4x - 0{,}03 = \big((x-1{,}3)x + 0{,}4\big)x - 0{,}03 \\ f'(x) &= 3x^2 - 2{,}6x + 0{,}4 = (3x - 2{,}6)x + 0{,}4 \\ f''(x) &= 6x - 2{,}6 \end{aligned}$$

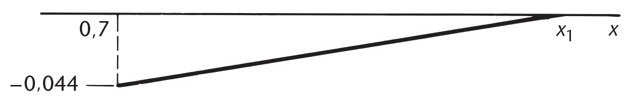
n	x_0	$f(x_0)$	$f''(x_0)$	$h = \sqrt{\frac{-2f(x_0)}{f''(x_0)}}$	$x_1 = x_0 \pm h$
0	0,7	–0,044			

Uzupełnij ten wiersz.

57

n	x_0	$f(x_0)$	$f''(x_0)$	$h = \sqrt{\frac{-2f(x_0)}{f''(x_0)}}$	$x_1 = x_0 \pm h$
0	0,7	–0,044	1,6	0,2345	0,9345

Zauważ, że do wyznaczenia wartości $x_1 = x_0 \pm h$ bierzemy znak dodatni, ponieważ dla $x_0 = 0{,}7$ wartość $f(x_0)$ jest ujemna, a nachylenie $f'(x_0)$ jest dodatnie.



Mając obliczone $x_1 = 0{,}9345$, wracamy w dalszych obliczeniach do zwykłego wzoru $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Uzupełniamy tabelę i otrzymujemy z niej poszukiwane rozwiązanie.

58

Tabela utworzona w arkuszu kalkulacyjnym powinna wyglądać tak:

n	x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0,7	–0,044	0,05	1,6
1	0,934521	0,024625	0,590233	
2	0,892801	0,002544	0,469997	
3	0,887387	4,02E-05	0,45516	
4	0,887298	1,06E-08	0,454919	
5	0,887298	9,16E-16	0,454919	

Z dokładnością do sześciu cyfr znaczących otrzymujemy zatem $x = 0{,}887298$.

Zauważ, że metody zmodyfikowanej użyliśmy tylko do obliczenia x_1. Dalej stosowaliśmy zwykłą metodę Newtona-Raphsona.

A teraz…

Do tej pory naszym zadaniem było znaleźć taką wartość x, która spełnia równanie $f(x) = 0$. To jest podejście ogólne, ponieważ *każde* równanie z niewiadomą x można zapisać w tej postaci. Dla przykładu równanie

$$\sin x = x - e^{3x}$$

można przekształcić do postaci

$$\sin x - x + e^{3x} = 0$$

i rozwiązać je jedną z omówionych dotychczas metod.

Teraz będziemy chcieli postąpić inaczej – dla danej wartości x znaleźć odpowiadającą jej wartość $f(x)$. Jeśli funkcja $f(x)$ jest dana dokładnym wzorem, wtedy nie ma z tym problemu. Wystarczy podstawić x do wzoru i dokonać obliczeń. Jednak bardzo często nasza funkcja istnieje, ale nie jest dana dokładnym wzorem. Jest tak na przykład, jeśli mamy do czynienia z wartościami otrzymanymi w wyniku jakiegoś eksperymentu lub testu praktycznego. W kolejnych ramkach zajmiemy się tym problemem.

Przejdź do kolejnej ramki.

Interpolacja

59

Jeśli funkcja jest określona konkretnym wzorem, jak np.

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 7$$

czy

$$f(x) = 5 \sin e^x,$$

to wartości zmiennej zależnej $f(x)$ odpowiadające zadanym wartościom zmiennej niezależnej x można wyznaczyć przez bezpośrednie podstawienie. Jednak czasami funkcja nie jest określona w ten sposób, ale przez zbiór uporządkowanych par liczb.

Przykład 1

Przypuśćmy, że funkcja f jest określona następującym zbiorem danych:

x	$f(x)$
1	4
2	14
3	40
4	88
5	164
6	274

Wartości pośrednie, np. dla $x = 2{,}5$, można wyznaczyć w procesie zwanym **interpolacją**.

Jest oczywiste, że wartość $f(2{,}5)$ leży pomiędzy 14 a 40, czyli wartościami funkcji dla $x = 2$ oraz $x = 3$.

Możemy oszacować $f(2{,}5) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Co proponujesz?

60

27

Interpolacja liniowa

Jeśli twój wynik to 27, bez wątpienia zauważyłeś, że $x = 2{,}5$ leży pośrodku między $x = 2$ a $x = 3$, więc $f(2{,}5)$ powinno leżeć pośrodku między 14 i 40, a zatem będzie to 27. Jest to najprostsza postać interpolacji. Ale nikt nie powiedział, że pomiędzy x a $f(x)$ istnieje zależność liniowa. Dlatego podany wynik jest jedynie tym, jakiego można się spodziewać.

Oczywiście można też oszacować wartość $f(2{,}5)$ innymi sposobami, np.

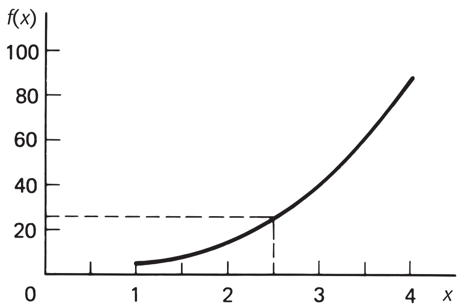
. . . .

61

rysując wykres funkcji $f(x)$

Interpolacja graficzna

Można oczywiście narysować wykres funkcji $f(x)$ i na jego podstawie oszacować wartość $f(x)$ dla $x = 2{,}5$.



Ta metoda też jest przybliżona; ponadto może zabrać nam wiele czasu.

$$f(2{,}5) \approx 26$$

W kolejnych ramkach spojrzymy na interpolację z punktu widzenia *różnic skończonych*. Ta metoda jest szybka i użyteczna, gdy wartości x są równo rozmieszczone. Jeśli natomiast wartości x nie są równo rozmieszczone, musimy uciec się do bardziej zaawansowanej metody algebraicznej zwanej *interpolacją Lagrange'a* (której oczywiście można użyć również dla punktów równo rozmieszczonych).

Przejdź do kolejnej ramki.

62 Wzór interpolacyjny Gregory'ego-Newtona z różnicami progresywnymi

x	$f(x)$
$\vdots$	$\vdots$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
$\vdots$	$\vdots$

$$\Delta f_0 = f(x_1) - f(x_0)$$

Zakładamy, że $x_0, x_1, \ldots$ są równo rozmieszczone oraz $x_0 < x_1 < \ldots$

Dla każdej pary występujących w powyższej tabeli kolejnych wartości funkcji $f(x_0)$ oraz $f(x_1)$ obliczamy *różnicę progresywną* Δf_0, odejmując $f(x_0)$ od $f(x_1)$. Tę różnicę zapisujemy w trzeciej kolumnie tabeli, w środku pomiędzy wierszami zawierającymi $f(x_0)$ i $f(x_1)$.

x	$f(x)$	Δf
1	4	
		10
2	14	
		26
3	40	
$\vdots$	$\vdots$	

Uzupełnij tabelę, używając danych z ramki 59. Tabela przyjmie postać . . . .

63

x	$f(x)$	Δf
1	4	
		10
2	14	
		26
3	40	
		48
4	88	
		76
5	164	
		110
6	274	

Teraz dopiszemy czwartą kolumnę, w której umieścimy różnice progresywne wartości Δf. Oznaczymy je przez $\Delta^2 f$ i zapiszemy w środku pomiędzy wierszami zawierającymi Δf. Nazwiemy je *różnicami progresywnymi drugiego rzędu funkcji* $f(x)$.

Nasza tabela przyjmie więc postać . . . .

64

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$
1	4		
		10	
2	14		16
		26	
3	40		22
		48	
4	88		28
		76	
5	164		34
		110	
6	274		

W podobny sposób możemy dodać kolejną kolumnę zawierającą różnice progresywne trzeciego rzędu ($\Delta^3 f$). Otrzymujemy . . . .

65

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
1	4			
		10		
2	14		16	
		26		6
3	40		22	
		48		6
4	88		28	
		76		6
5	164		34	
		110		
6	274			

Zauważ, że konstrukcja tabeli została zakończona, ponieważ różnice trzeciego rzędu są stałe, więc wszystkie różnice kolejnych rzędów będą zerowe.

Teraz zobaczysz, jak użyć tej tabeli. Przejdź więc dalej.

66

Wyznaczymy teraz $f(2{,}5)$.

	x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
	1	4			
			10		
$x_0 \longrightarrow$	2	14		16	
h $\quad x_p$			26		6
$x_1 \longrightarrow$	3	40		22	
			48		6
	4	88		28	
			76		6
	5	164		34	
			110		
	6	274			

Oznaczmy $\left.\begin{array}{l} x = 2 \text{ jako } x_0 \\ x = 3 \text{ jako } x_1 \end{array}\right\} x = 2{,}5 \text{ jako } x_p.$

Niech h będzie stałym odstępem pomiędzy kolejnymi wartościami x, czyli $h = x_1 - x_0$.

Zapisujemy wyrażenie $x_p - x_0$ jako odpowiednią część h, tj. $p = \dfrac{x_p - x_0}{h}$, $0 < p < 1$.

W naszym przypadku $h = 1$ oraz $p = \dfrac{2{,}5 - 2{,}0}{1} = 0{,}5$.

Używamy tylko wartości podkreślonych w powyższej tabeli linią przerywaną.

Są to:

$p = \ldots\ldots\ldots\ldots;\quad f_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots;\quad \Delta f_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots;$

$\Delta^2 f_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots;\quad \Delta^3 f_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

67

$$\boxed{p = 0{,}5 \quad f_0 = 14; \quad \Delta f_0 = 26; \quad \Delta^2 f_0 = 22; \quad \Delta^3 f_0 = 6}$$

Możemy już zapisać *wzór interpolacyjny Gregory'ego-Newtona z różnicami progresywnymi*.

$$f_p = f_0 + p\Delta f_0 + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 f_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Delta^3 f_0 + \ldots$$

Czasami zapisujemy to w postaci operatorowej

$$f_p = \left(1 + p\Delta + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 + \ldots\right) f_0,$$

w której bez wątpienia można rozpoznać rozwinięcie dwumianowe wyrażenia

$$f_p = (1 + \Delta)^p \cdot f_0.$$

Wstawienie wartości z powyższego przykładu daje nam

$$f(2{,}5) = f_p = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

68

$$\boxed{24{,}625}$$

Ponieważ:

$$f_p = 14 + 0{,}5 \cdot 26 + \frac{0{,}5 \cdot (-0{,}5)}{1 \cdot 2} \cdot 22 + \frac{0{,}5 \cdot (-0{,}5) \cdot (-1{,}5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 6$$

$$= 14 + 13 - 2{,}75 + 0{,}375$$

$$= 27{,}375 - 2{,}75 = 24{,}625.$$

Porównajmy wszystkie trzy omówione metody.

(a) Interpolacja liniowa: $f(2{,}5) = 27$.

(b) Interpolacja graficzna: $f(2{,}5) = 26$.

(c) Wzór interpolacyjny Gregory'ego-Newtona: $f(2{,}5) = 24{,}625$.

Przykład 2

x	$f(x)$
2	14
4	88
6	274
8	620
10	1174

Wyznacz wartość $f(x)$ dla $x = 5{,}5$.

W tym przypadku:

$x_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$;

$h = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $p = \ldots\ldots\ldots\ldots$

69

$$\boxed{x_0 = 4; \quad x_1 = 6; \quad h = 2; \quad p = 0{,}75}$$

Ponieważ:

$$h = x_1 - x_0 = 6 - 4 = 2;$$

$$p = \frac{x_p - x_0}{h} = \frac{5{,}5 - 4}{2} = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75.$$

Najpierw stworzymy tabelę różnic progresywnych ....

70

	x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
	2	14			
			74		
$x_0 \longrightarrow$	4	88		112	
			186		48
$x_1 \longrightarrow$	6	274		160	
			346		48
	8	620		208	
			554		
	10	1174			

Wzór interpolacyjny Gregory'ego-Newtona z różnicami progresywnymi ma postać

$$f_p = (1+\Delta)^p \cdot f_0,$$

czyli $f_p = \ldots\ldots\ldots\ldots$

71

$$\boxed{\begin{aligned} f_p &= \left(1 + p\Delta + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 + \ldots\right) f_0 \\ &= f_0 + p\Delta f_0 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \ldots \end{aligned}}$$

Podstawiając odpowiednie wartości z tabeli, otrzymujemy

$$f(5{,}5) = f_p = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

72

$$\boxed{214{,}4}$$

Ponieważ:

	x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
	2	14			
			74		
$x_0 \longrightarrow$	4	88		112	
$x_p \longrightarrow$			186		48
$x_1 \longrightarrow$	6	274		160	
			346		48
	8	620		208	
			554		
	10	1174			

$$f(5{,}5) = f_p = 88 + 0{,}75 \cdot 186 + \frac{0{,}75 \cdot (-0{,}25)}{1 \cdot 2} \cdot 160 + \frac{0{,}75 \cdot (-0{,}25) \cdot (-1{,}25)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 48$$

$$= 88 + 139{,}5 - 15 + 1{,}875 = 214{,}375$$

$$\therefore\ f(5{,}5) = 214{,}4$$

Na koniec jeszcze jeden przykład.

Przykład 3

Wyznacz wartość $f(-1)$, dysponując poniższą tabelą.

x	-4	-2	0	2	4	6	8
$f(x)$	541	55	1	-53	-155	31	1225

Po zakończeniu obliczeń sprawdź je w następnej ramce.

73

$$\boxed{f(-1) = 10}$$

Poniżej prezentujemy obliczenia; metoda jak poprzednio.

	x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
	-4	541				
			-486			
x_0	-2	55		432		
x_p			-54		-432	
x_1	0	1		0		384
			-54		-48	
	2	-53		-48		384
			-102		336	
	4	-155		288		384
			186		720	
	6	31		1008		
			1194			
	8	1225				

$x_0 = -2;\quad x_1 = 0;\quad x_p = -1;\qquad \therefore\ h = 2;\quad p = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
f_p &= f_0 + p\Delta f_0 + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 f_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 f_0 + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta^4 f_0\\
&= 55 + \frac{1}{2}\cdot(-54) + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot 2}\cdot 0 \ + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(-48) + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 384\\
&= 55 - 27 + 0 - 3 - 15 = 10
\end{aligned}$$

$\therefore\ f_p = f(-1) = 10$

Powyższa tabela z obliczeniami ma swoje ograniczenia. Gdybyśmy chcieli wyznaczyć na jej podstawie wartość $f(2{,}5)$, okaże się to niemożliwe, ponieważ nie mamy odpowiedniej liczby dla $\Delta^4 f$. W takim przypadku możemy uciec się do przejścia tabeli zygzakiem, używając **różnic centralnych**.

Przejdź do kolejnej ramki.

74

Różnice centralne

Operator różnicy centralnej δ działający na funkcję $f(x)$ definiujemy wzorem

$$\delta f(x) = f(x + h/2) - f(x - h/2).$$

Wtedy wartość $f(x)$ bliską f_0 interpolujemy **wzorem progresywnym Gaussa**

$$f_p = f_0 + p\delta f_{0+\frac{1}{2}} + \frac{p(p-1)}{2!}\delta^2 f_0 + \frac{(p+1)p(p-1)}{3!}\delta^3 f_{0+\frac{1}{2}} + \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)}{4!}\delta^4 f_0 + \dots$$

lub **wzorem wstecznym Gaussa**

$$f_p = f_0 + p\delta f_{0-\frac{1}{2}} + \frac{(p+1)p}{2!}\delta^2 f_0 + \frac{(p+1)p(p-1)}{3!}\delta^3 f_{0-\frac{1}{2}} + \frac{(p+2)(p+1)p(p-1)}{4!}\delta^4 f_0 + \dots .$$

Nie mamy obliczonych wartości w punktach środkowych przedziałów $x_0 + h/2$ oraz $x_0 - h/2$. Dlatego bierzemy zamiast nich liczby znajdujące się w tabeli różnic progresywnych, ale poruszając się po niej zygzakiem (jak pokazano poniżej). Tak więc obie tabele różnic (centralnych i progresywnych) są identyczne (z wyjątkiem nagłówków). Jednak różne są sposoby poruszania się po nich. Dla przykładu znajdziemy $f(2{,}5)$ dla funkcji z ramki 59.

x	$f(x)$	$\delta f(x)$	$\delta^2 f(x)$	$\delta^3 f(x)$
1	4			
		10		
2	14		16	
		26		6
3	40		22	
		48		6
4	88		28	
		76		6
5	164		34	
		110		
6	274			

Tutaj $x_0 = 2$, $f_0 = 14$, $\delta f_{0+\frac{1}{2}} = 26$, $\delta^2 f_0 = 16$, $\delta^3 f_{0+\frac{1}{2}} = 6$, $\delta^4 f_0 = 0$ oraz $p = 0{,}5$. Dlatego

$$f_p = 14 + 0{,}5 \cdot 26 + \frac{0{,}5 \cdot (-0{,}5)}{2} \cdot 16 + \frac{1{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot (-0{,}5)}{6} \cdot 6$$
$$= 14 + 13 - 2 - 0{,}375 = 24{,}625.$$

Obliczona wartość jest taka sama jak ta znaleziona za pomocą wzoru Gregory'ego-Newtona z różnicami progresywnymi.

Teraz zrób obliczenia samodzielnie. Dana jest tabela wartości innej funkcji.

x	$f(x)$	$\delta f(x)$	$\delta^2 f(x)$	$\delta^3 f(x)$
0	-5			
		3		
1	-2		6	
		9		12
2	7		18	
		27		12
3	34		30	
		57		
4	91			

Stosując wzór progresywny Gaussa, interpolujemy

$$f(2{,}2) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

75

$\boxed{10{,}576}$

Ponieważ

używając wzoru $f_p = f_0 + p\delta f_{0+\frac{1}{2}} + \dfrac{p(p-1)}{2!}\delta^2 f_0 + \dfrac{p(p-1)(p+1)}{3!}\delta^3 f_{0+\frac{1}{2}} + \ldots$

i podążając za linią ciągłą w powyższej tabeli, dostajemy

$x_0 = 2,\quad f_0 = 7,\quad \delta f_{0+\frac{1}{2}} = 27,\quad \delta^2 f_0 = 18,\quad \delta^3 f_{0+\frac{1}{2}} = 12$ oraz $p = 0{,}2$,

$$\begin{aligned} \text{skąd } f_p &= 7 + 0{,}2\cdot 27 + \frac{0{,}2\cdot(-0{,}8)}{2}\cdot 18 + \frac{0{,}2\cdot(-0{,}8)\cdot 1{,}2}{6}\cdot 12 \\ &= 7 + 5{,}4 - 1{,}44 - 0{,}384 \\ &= 10{,}576. \end{aligned}$$

Stosując wzór wsteczny Gaussa (podążając za linią przerywaną)

$$f_p = f_0 + p\delta f_{0-\frac{1}{2}} + \frac{p(p+1)}{2!}\delta^2 f_0 + \frac{p(p-1)(p+1)}{3!}\delta^3 f_{0-\frac{1}{2}} + \ldots,$$

gdzie $\delta f_{0-\frac{1}{2}} = 9$ oraz $\delta^3 f_{0-\frac{1}{2}} = 12$, mamy

$$\begin{aligned} f_p &= 7 + 0{,}2\cdot 9 + \frac{0{,}2\cdot 1{,}2}{2}\cdot 18 + \frac{0{,}2\cdot 1{,}2\cdot(-0{,}8)}{6}\cdot 12 \\ &= 7 + 1{,}8 + 2{,}16 - 0{,}384 = 10{,}576. \end{aligned}$$

Otrzymany wynik jest taki sam jak ten znaleziony wzorem progresywnym Gaussa.

Przejdź do kolejnej ramki.

76 Różnice wsteczne Gregory'ego-Newtona

Widzieliśmy, że w metodzie różnic progresywnych Gregory'ego-Newtona brakowało nam danych, gdy chcieliśmy interpolować funkcję w punktach leżących blisko końca tabeli. Widzieliśmy też, że problemu można uniknąć, stosując różnice centralne. Jednak nawet posługując się różnicami centralnymi, może zabraknąć nam danych, zanim przejdziemy do końca tabeli. W takiej sytuacji uciekniemy się do wzoru Gregory'ego-Newtona z różnicami wstecznymi

$$f_p = f_0 + p\Delta f_{-1} + \frac{p(p+1)}{2!}\Delta^2 f_{-2} + \frac{p(p+1)(p+2)}{3!}\Delta^3 f_{-3} + \ldots$$

Jako przykład spójrzmy na tabelę z ramki 74.

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
1	4			
		10		
2	14		16	
		26		6
3	40		22	
		48		6
4	88		28	
		76		6
5	164		34	
		110		
6	274			

Używając tej tabeli, możemy wyznaczyć $f(5{,}5)$, przechodząc ją wzdłuż linii przerywanej.

$$
\begin{aligned}
f(5{,}5) &= f_0 + 0{,}5\Delta f_{-1} + \frac{0{,}5\cdot 1{,}5}{2}\Delta^2 f_{-2} + \frac{0{,}5\cdot 1{,}5\cdot 2{,}5}{6}\Delta^3 f_{-3} \\
&= 164 + 0{,}5\cdot 76 + \frac{0{,}5\cdot 1{,}5\cdot 28}{2} + \frac{0{,}5\cdot 1{,}5\cdot 2{,}5\cdot 6}{6} \\
&= 214{,}375
\end{aligned}
$$

77

W każdym z przykładów, które dotychczas rozważyliśmy, w pewnym miejscu tabeli różnic otrzymywaliśmy kolumnę zer. To wyznaczało nam liczbę składników we wzorach interpolacyjnych. Zera pojawiały się dlatego, że funkcje, które braliśmy pod uwagę, były wielomianami. W kolejnym przykładzie zobaczymy tabelę różnic bez kolumny zer. W takim przypadku liczba składników wzoru interpolacyjnego zależy od przyjętej przez nas dokładności.

Przykład

Stosując metodę różnic progresywnych Gregory'ego-Newtona, znajdziemy $f(0{,}15)$ z dokładnością do czterech cyfr znaczących, dysponując następującą tabelą różnic skończonych.

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0	0,000000			
		0,099833		
0,1	0,099833		−0,000997	
		0,098836		−0,000988
0,2	0,198669		−0,001985	
		0,096851		−0,000968
0,3	0,295520		−0,002953	
		0,093898		−0,000937
0,4	0,389418		−0,003890	
		0,090008		
0,5	0,479426			

Mamy tu $x_0 = 0{,}1$, $x_1 = 0{,}2$, $x_p = 0{,}15$, skąd $p = 0{,}5$ oraz

$$
\begin{aligned}
f_p &= f_0 + p\Delta f_0 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \dots \\
&= 0{,}099833 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}098836 + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-0{,}001985)/2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(-0{,}000968)/6 + \dots \\
&= 0{,}099833 + 0{,}049418 + 0{,}000248 - 0{,}000061 + \dots \\
&= 0{,}1494 \text{ z dokładnością do czterech miejsc po przecinku.}
\end{aligned}
$$

Jak widać, obliczenia można kontynuować. Kończymy je wtedy, gdy osiągniemy wymaganą liczbę cyfr znaczących interpolowanej wartości funkcji.

78 Interpolacja Lagrange'a

Jeśli linia prosta $p(x) = a_0 + a_1 x$ przechodzi przez dwa punkty $(x_0, f(x_0))$ oraz $(x_1, f(x_1))$, gdzie a_0 i a_1 są stałymi, to jej równanie można napisać w postaci

$$p(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1).$$

Na przykład linia prosta $p(x) = 3 + 2x$ przechodzi przez dwa punkty (1, 5) oraz (2, 7). Podstawienie tych wartości w odpowiednie miejsca powyższego równania pokazuje alternatywną postać równania tej prostej:

$$p(x) = \frac{x - 2}{1 - 2} \cdot 5 + \frac{x - 1}{2 - 1} \cdot 7 = 10 - 5x + 7x - 7 = 3 + 2x.$$

Dlatego mając dwa punkty jak w ramce 59, tj. (2, 14) oraz (3, 40), i stosując interpolację liniową, otrzymujemy

$$f(2{,}5) \approx p(2{,}5) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

79

$\boxed{27}$

Ponieważ:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \\ &= \frac{x - 3}{2 - 3} \cdot 14 + \frac{x - 2}{3 - 2} \cdot 40 = 26x - 38, \end{aligned}$$

skąd

$$f(2{,}5) \approx p(x) = 26(2{,}5) - 38 = 27.$$

80

Zasada interpolacji Lagrange'a dla funkcji danej przez zbiór punktów polega na tym, że zakładamy, że ta funkcja zachowuje się jak wielomian $p(x)$ przechodzący przez te wszystkie punkty. Nazywamy go **wielomianem interpolacyjnym**. Ma on rząd o jeden mniejszy niż liczba punktów, którymi dysponujemy. Dla dwóch punktów wielomian interpolacyjny jest liniowy tak jak widzieliśmy to w ostatnim przykładzie. Dla trzech punktów jest to już wielomian kwadratowy, dla czterech punktów sześcienny itp.

Tak samo jak poprzednio można pokazać, że wielomian kwadratowy

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

przechodzący przez trzy punkty $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ oraz $(x_2, f(x_2))$, można zapisać jako

$$p(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2).$$

▶

Spróbujmy. Mamy następującą tabelę wartości funkcji:

x	$f(x)$
1,5	0,405
2,1	0,742
3	1,099

Stosując interpolację Lagrange'a, mamy $f(1{,}8) \approx \ldots\ldots\ldots\ldots$ z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

81

$\boxed{0{,}58}$

Ponieważ:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2) \\ &= \frac{(x-2{,}1)\cdot(x-3)}{(1{,}5-2{,}1)\cdot(1{,}5-3)}\cdot 0{,}405 + \frac{(x-1{,}5)\cdot(x-3)}{(2{,}1-1{,}5)\cdot(2{,}1-3)}\cdot 0{,}742 + \frac{(x-1{,}5)\cdot(x-2{,}1)}{(3-1{,}5)\cdot(3-2{,}1)}\cdot 1{,}099 \\ &= \frac{x^2-5{,}1x+6{,}3}{0{,}9}\cdot 0{,}405 + \frac{x^2-4{,}5x+4{,}5}{-0{,}54}\cdot 0{,}742 + \frac{x^2-3{,}6x+3{,}15}{1{,}35}\ 1{,}099 \\ &= -0{,}11x^2+0{,}958x-0{,}784. \end{aligned}$$

Dlatego

$f(1{,}8) \approx p(1{,}8) = 0{,}58$ z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Przyglądając się uważnie wielomianom interpolacyjnym dla dwóch lub trzech punktów, powinniśmy dostrzec pewien schemat. Napisz, jak według Ciebie powinien wyglądać wielomian interpolacyjny dla czterech punktów:

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

82

$$\boxed{\begin{aligned} p(x) = {} & \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}f(x_1) \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}f(x_2) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}f(x_3) \end{aligned}}$$

Teraz zbuduj wielomian interpolacyjny dla punktów z poniższej tabeli:

x	$f(x)$
1	0,368
1,2	0,301
1,3	0,273
1,5	0,223

$f(1{,}4) \approx \ldots\ldots\ldots\ldots$ z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

83

$$\boxed{0{,}25}$$

Ponieważ:

$$\begin{aligned}
p(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}f(x_1)\\
&\quad + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}f(x_2) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}f(x_3)\\
&= \frac{(x-1,2)\cdot(x-1,3)\cdot(x-1,5)}{(1-1,2)\cdot(1-1,3)\cdot(1-1,5)}\cdot 0,368 + \frac{(x-1)\cdot(x-1,3)\cdot(x-1,5)}{(1,2-1)\cdot(1,2-1,3)\cdot(1,2-1,5)}\cdot 0,301\\
&\quad + \frac{(x-1)\cdot(x-1,2)\cdot(x-1,5)}{(1,3-1)\cdot(1,3-1,2)\cdot(1,3-1,5)}\cdot 0,273 + \frac{(x-1)\cdot(x-1,2)\cdot(x-1,3)}{(1,5-1)\cdot(1,5-1,2)\cdot(1,5-1,3)}\cdot 0,223\\
&= \frac{x^3-4x^2+5,31x-2,34}{-0,03}\cdot 0,368 + \frac{x^3-3,8x^2+4,75x-1,95}{0,006}\cdot 0,301\\
&\quad + \frac{x^3-3,7x^2+4,5x-1,8}{-0,006}\cdot 0,273 + \frac{x^3-3,5x^2+4,06x-1,56}{0,03}\cdot 0,223\\
&= -0,167x^3+0,767x^2-1,415x+1,183.
\end{aligned}$$

Dlatego

$f(1,4) \approx p(1,4) = 0,25$ z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Ogólnie wielomian Lagrange'a dla $n+1$ punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ma postać

$$\begin{aligned}
p(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(\cdots)(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(\cdots)(x_0-x_n)}f(x_0)\\
&\quad + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(\cdots)(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(\cdots)(x_1-x_n)}f(x_1) + \cdots\\
&\quad \cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(\cdots)(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(\cdots)(x_n-x_{n-1})}f(x_n).
\end{aligned}$$

W tym miejscu kończymy ten program. Dokładnie przeczytaj **Podsumowanie**, a następnie odpowiedz na pytania z listy kontrolnej **Czy potrafisz?**. Jeśli czujesz, że wystarczająco opanowałeś materiał tego programu, spróbuj rozwiązać **Zadania sprawdzające**. Rób to powoli, pracując w swoim tempie. Nie musisz się spieszyć. Sekcja **Dalsze wyzwania** zawiera kolejne pouczające ćwiczenia.

Podsumowanie 1

1 *Zasadnicze twierdzenie algebry* można sformułować następująco:

Każdy wielomian $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ można zapisać jako iloczyn n czynników liniowych:

$$f(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(\cdots)(x - r_n).$$

2 *Związki między współczynnikami a pierwiastkami równania wielomianowego*

Jeśli wielomian o *współczynnikach rzeczywistych* a_i ma pierwiastek zespolony, to jego sprzężenie też jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Jeśli α, β, γ, ... są pierwiastkami równania

$$p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots + p_{n-1}x + p_n = 0,$$

w którym $p_0 \neq 0$, to:

suma pierwiastków = $-\dfrac{p_1}{p_0}$;

suma iloczynów pierwiastków, po dwa naraz = $\dfrac{p_2}{p_0}$;

suma iloczynów pierwiastków, po trzy naraz = $-\dfrac{p_3}{p_0}$;

suma iloczynów pierwiastków, po n naraz = $(-1)^n \dfrac{p_n}{p_0}$.

3 *Równania sześcienne*

Postać zredukowana

Każde równanie sześcienne postaci $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ można zapisać w postaci zredukowanej $y^3 + py + q = 0$, stosując podstawienie $x = y - \dfrac{a}{3}$.

Metoda Tartaglii

Każde równanie sześcienne o współczynnikach rzeczywistych ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Można go znaleźć analitycznie, stosując metodę Tartaglii. Pierwiastkiem rzeczywistym równania $x^3 + ax + b = 0$, gdzie $a > 0$, jest

$$x = \left(-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}\right)^{1/3} + \left(-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}}\right)^{1/3}.$$

Jeśli $a < 0$, najlepiej uciec się do metod numerycznych.

4 *Metody numeryczne*

Połowienie przedziału

Metoda połowienia przedziału, służąca do znajdowania rozwiązania równania $f(x) = 0$, polega na:

znalezieniu wartości x, dla której $f(x) < 0$; powiedzmy, że będzie to $x = a$;
znalezieniu wartości x, dla której $f(x) > 0$; powiedzmy, że będzie to $x = b$.

Rozwiązanie równania $f(x) = 0$ musi leżeć pomiędzy a oraz b. Co więcej, musi leżeć albo w pierwszej połowie tego przedziału, albo w drugiej połowie.

5 *Numeryczne rozwiązywanie równań metodą iteracji*

Proces znajdowania przybliżonego rozwiązania równania

$$f(x) = 0$$

metodą iteracji polega na znalezieniu przybliżonego rozwiązania, którego następnie używa się do otrzymania rozwiązania dokładniejszego. Tę procedurę powtarzamy aż do momentu, w którym znalezione rozwiązanie osiągnie żądaną dokładność.

6 *Użycie arkusza kalkulacyjnego*

Procedury iteracyjne można efektywnie stosować, używając arkusza kalkulacyjnego.

7 *Metoda iteracyjna Newtona-Raphsona*

Jeśli $x = x_0$ jest rozwiązaniem przybliżonym równania $f(x) = 0$, lepsze przybliżenie $x = x_1$ uzyskujemy jako

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \text{ i ogólnie } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

8 *Zmodyfikowana metoda iteracyjna Newtona-Raphsona*

Jeśli w metodzie Newtona-Raphsona pochodna $f'(x_0)$ jest na tyle mała, że x_1 jest gorszym niż x_0 przybliżeniem rozwiązania równania, to x_1 uzyskujemy, stosując inny wzór

$$x_1 = x_0 \pm \sqrt{\frac{-2f(x_0)}{f''(x_0)}}.$$

W kolejnych iteracjach używamy wzoru $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

9 *Interpolacja*

Liniowa

Graficzna

10 *Wzór interpolacyjny Gregory'ego-Newtona z różnicami progresywnymi*

$$f_p = f_0 + p\Delta f_0 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 f_o + \cdots$$

11 *Wzory interpolacyjne Gaussa z różnicami centralnymi*

Progresywny wzór Gaussa

$$f_p = f_0 + p\delta f_{0+\frac{1}{2}} + \frac{p(p-1)}{2!}\delta^2 f_0 + \frac{(p+1)p(p-1)}{3!}\delta^3 f_{0+\frac{1}{2}} + \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)}{4!}\delta^4 f_0 + \cdots$$

Wsteczny wzór Gaussa

$$f_p = f_0 + p\delta f_{0-\frac{1}{2}} + \frac{(p+1)p}{2!}\delta^2 f_0 + \frac{(p+1)p(p-1)}{3!}\delta^3 f_{0-\frac{1}{2}} + \frac{(p+2)(p+1)p(p-1)}{4!}\delta^4 f_0 + \cdots$$

12 *Wzór interpolacyjny Gregory'ego-Newtona z różnicami wstecznymi*

$$f_p = f_0 + p\Delta f_{-1} + \frac{p(p+1)}{2!}\Delta^2 f_{-2} + \frac{p(p+1)(p+2)}{3!}\Delta^3 f_{-3} + \cdots$$

13 *Interpolacja Lagrange'a*

Jeśli linia prosta $p(x) = a_0 + a_1 x$ przechodzi przez dwa punkty $(x_0, f(x_0))$ oraz $(x_1, f(x_1))$, gdzie a_0 oraz a_1 są stałymi, to wielomian interpolacyjny (linia prosta) ma postać

$$p(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1).$$

Kwadratowy wielomian interpolacyjny przechodzący przez trzy punkty $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ oraz $(x_2, f(x_2))$ ma postać

$$p(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2).$$

Sześcienny wielomian interpolacyjny przechodzący przez cztery punkty $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ oraz $(x_3, f(x_3))$ ma postać

$$\begin{aligned} p(x) = {} & \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} f(x_1) \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} f(x_2) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} f(x_3). \end{aligned}$$

Wielomian interpolacyjny przechodzący przez $n + 1$ punktów ma postać

$$\begin{aligned} p(x) = {} & \frac{(x - x_1)(x - x_2)(\cdots)(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(\cdots)(x_0 - x_n)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(\cdots)(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(\cdots)(x_1 - x_n)} f(x_1) + \cdots \\ & \cdots + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(\cdots)(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(\cdots)(x_n - x_{n-1})} f(x_n). \end{aligned}$$

Czy potrafisz?

Lista kontrolna 1

Wypełnij tę listę dwukrotnie: przed i po rozwiązaniu ***Zadań sprawdzających***.

Oceń w skali od 1 do 5, czy potrafisz: **Ramki**

- zrozumieć znaczenie zasadniczego twierdzenia algebry; 1 do 3

  Tak ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ *Nie*

- wyznaczyć dwa pierwiastki równania kwadratowego i dostrzec, że pierwiastki zespolone wielomianów o współczynnikach rzeczywistych występują w parach wzajemnie sprzężonych; 4 do 6

  Tak ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ *Nie*

- zastosować związki między współczynnikami a pierwiastkami wielomianów do znajdowania pierwiastków wielomianów; 7 do 17

  Tak ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ *Nie*

- wyznaczyć postać zredukowaną równania sześciennego; 18 do 20

  Tak ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ *Nie*

- zastosować metodę Tartaglii do znalezienia pierwiastka rzeczywistego równania sześciennego; 21 do 22

Tak ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ *Nie*

- znaleźć rozwiązanie równania postaci $f(x) = 0$ metodą połowienia przedziału; 23 do 26

Tak ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ *Nie*

- rozwiązywać równania z jedną niewiadomą rzeczywistą metodą iteracji oraz wspomóc się w tym arkuszem kalkulacyjnym; 27 do 33

Tak ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ *Nie*

- rozwiązywać równania metodą iteracyjną Newtona-Raphsona; 34 do 52

Tak ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ *Nie*

- stosować zmodyfikowaną metodę Newtona-Raphsona do znajdowania pierwszego przybliżenia, gdy pochodna jest mała; 53 do 58

Tak ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ *Nie*

- zrozumieć znaczenie interpolacji i stosować interpolację liniową i graficzną; 59 do 61

Tak ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ *Nie*

- stosować wzór interpolacyjny Gregory'ego-Newtona z różnicami progresywnymi i wstecznymi dla równo rozmieszczonych węzłów; 62 do 73

Tak ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ *Nie*

- stosować wzór interpolacyjny Gaussa z różnicami centralnymi dla równo rozmieszczonych węzłów; 74 do 77

Tak ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ *Nie*

- stosować interpolację Lagrange'a, w przypadku gdy węzły nie są równo rozmieszczone. 78 do 83

Tak ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ *Nie*

Zadania sprawdzające 1

1 Wiedząc, że $x = -1 + \sqrt{3}i$ jest jednym z pierwiastków równania kwadratowego o współczynnikach rzeczywistych, znajdź drugi pierwiastek oraz napisz to równanie.

2 Rozwiąż równanie sześcienne $2x^3 - 7x^2 - 42x + 72 = 0$.

3 Zapisz równanie sześcienne $3x^3 + 5x^2 + 3x + 5$ w postaci zredukowanej i znajdź jego pierwiastek rzeczywisty metodą Tartaglii.

4 Metodą połowienia przedziału rozwiąż równanie $x^3 - 5 = 0$ z dokładnością do czterech cyfr znaczących.

5 Metodą Newtona-Raphsona znajdź dodatnie rozwiązanie poniższego równania z dokładnością do sześciu cyfr po przecinku:

$$\cos 3x = x^2.$$

6 Zmodyfikowaną metodą Newtona-Raphsona znajdź z dokładnością do sześciu cyfr po przecinku rozwiązanie równania

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 9 = 0$$

leżące blisko $x = 2$.

7 Dysponując poniższą tabelą

x	$f(x)$
1	0
2	19
3	70
4	171
5	340
6	595

wyznacz przybliżoną wartość:

(a) $f(2{,}5)$, stosując wzór Gregory'ego-Newtona z różnicami progresywnymi;

(b) $f(3{,}4)$, stosując wzór Gaussa z różnicami centralnymi;

(c) $f(5{,}6)$, stosując wzór Gregory'ego-Newtona z różnicami wstecznymi.

8 Dysponując poniższą tabelą

x	$f(x)$
1	4
2	-9
5	-108

wyznacz metodą interpolacji Lagrange'a przybliżoną wartość $f(2{,}2)$.

Dalsze wyzwania 1

1 Wiedząc, że $x = \dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ oraz $x = \dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$ są pierwiastkami równania czwartego stopnia o współczynnikach rzeczywistych, znajdź dwa pozostałe pierwiastki i napisz to równanie.

2 Rozwiąż równanie $x^3 - 5x^2 - 8x + 12 = 0$, wiedząc, że suma dwóch jego pierwiastków wynosi 7.

3 Wyznacz wartości parametrów p, q, dla których wielomian $f(x) = 2x^3 + px^2 + qx + 6$ jest podzielny (bez reszty) przez $(x-2)(x+1)$.

4 Wiedząc, że reszta z dzielenia wielomianu $f(x) = 4x^4 + px^3 - 23x^2 + qx + 11$ przez $2x^2 + 7x + 3$ wynosi $3x + 2$, wyznacz wartości parametrów p, q.

5 Wiedząc, że dwa pierwiastki równania $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$ są liczbami przeciwnymi, znajdź wszystkie jego pierwiastki.

6 Rozwiąż równanie $x^3 - 7x^2 - 21x + 27 = 0$, wiedząc, że jego pierwiastki tworzą ciąg geometryczny.

7 Napisz równanie, którego pierwiastkami są pierwiastki równania $x^3 + x^2 + 9x + 9 = 0$ powiększone o 2.

8 Napisz równanie, którego pierwiastki są większe o 3 od pierwiastków równania $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$.

9 Rozwiąż równanie $4x^3 - 4x^2 - 5x + 3 = 0$, wiedząc, że ma ono dwa pierwiastki, których sumą jest 2.

10 Rozwiąż równanie $x^3 - 10x^2 + 8x + 64 = 0$, wiedząc, że iloczyn jego dwóch pierwiastków jest liczbą przeciwną do trzeciego pierwiastka.

11 Napisz równanie, którego pierwiastki są o 2 większe od pierwiastków równania $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$.

12 Udowodnij, że jeśli α, β, γ są pierwiastkami równania $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, to $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = p^2 - 2q$.

13 Metodą Tartaglii znajdź pierwiastek rzeczywisty równania $2x^3 + 4x - 5 = 0$ z dokładno ścią do czterech cyfr znaczących.

14 Rozwiąż równanie $x^3 - 6x - 4 = 0$.

15 Zapisz równanie $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$ w postaci zredukowanej i znajdź jego trzy pierwiastki.

16 Pokaż, że równanie $x^3 + 3x^2 - 4x - 6 = 0$ ma pierwiastek pomiędzy $x = 1$ oraz $x = 2$. Metodą iteracyjną Newtona-Raphsona znajdź go z dokładnością do czterech cyfr znaczących.

17 Znajdź pierwiastek rzeczywisty równania:

(a) $x^3 + 4x + 3 = 0$, (b) $5x^3 + 2x - 1 = 0$.

18 Rozwiąż równania:

(a) $x^3 - 5x + 1 = 0$, (b) $x^3 + 2x - 3 = 0$,

(c) $x^3 - 4x + 1 = 0$.

19 Zapisz poniższe równania w postaci zredukowanej i znajdź ich pierwiastki:

(a) $x^3 + 6x^2 + 9x + 5 = 0$,

(b) $8x^3 + 20x^2 + 6x - 9 = 0$,

(c) $4x^3 - 9x^2 + 42x - 10 = 0$.

20 W poniższych zadaniach zastosuj metodę iteracyjną Newtona-Raphsona.

(a) Pokaż, że równanie $x^3 + 3x^2 + 5x + 9 = 0$ ma pierwiastek pomiędzy $x = -2$ a $x = -3$. Podaj jego przybliżenie z dokładnością do czterech cyfr znaczących.

(b) Pokaż graficznie, że równanie $e^{2x} = 25x - 10$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste oraz znajdź większy z nich z dokładnością do czterech cyfr znaczących.

(c) Sprawdź, że równanie $x - \cos x = 0$ ma pierwiastek blisko $x = 0{,}8$ oraz znajdź go z dokładnością do trzech cyfr znaczących.

(d) Wyznacz graficznie przybliżoną wartość pierwiastka równania $2 \ln x = 3 - x$, a następnie oblicz ten pierwiastek z dokładnością do czterech cyfr znaczących.

(e) Sprawdź, że równanie $x^4 + 5x - 20 = 0$ ma pierwiastek blisko $x = 1{,}8$. Wyznacz go z dokładnością do pięciu cyfr znaczących.

(f) Pokaż, że równanie $x + 3 \sin x = 2$ ma pierwiastek pomiędzy $x = 0{,}4$ a $x = 0{,}6$. Wyznacz go z dokładnością do pięciu cyfr znaczących.

(g) Równanie $2 \cos x = e^x - 1$ ma pierwiastek pomiędzy $x = 0{,}8$ oraz $x = 0{,}9$. Wyznacz go z dokładnością do czterech cyfr znaczących.

(h) Równanie $20x^3 - 22x^2 + 5x - 1 = 0$ ma pierwiastek blisko $x = 0{,}6$. Wyznacz go z dokładnością do czterech cyfr znaczących.

21 Pewien wielomian jest określony poniższą tabelą wartości.

x	2	4	6	8	10
$y = f(x)$	–7,00	9,00	97,0	305	681

Wyznacz:

(a) $f(4{,}8)$, stosując wzór Gregory'ego-Newtona z różnicami progresywnymi;

(b) $f(7{,}2)$, stosując wzór Gaussa z różnicami centralnymi;

(c) $f(8{,}5)$, stosując wzór Gregory'ego-Newtona z różnicami wstecznymi.

22 Dla funkcji $f(x)$

x	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	–10	12	56	128	234	380	572

wyznacz:

(a) $f(4{,}5)$ oraz $f(6{,}4)$, stosując wzór Gregory'ego-Newtona z różnicami progresywnymi;

(b) $f(7{,}1)$ oraz $f(8{,}9)$, stosując wzór Gregory'ego-Newtona z różnicami wstecznymi.

23 Dla funkcji określonej w poniższej tabeli

x	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	–9	35	231	675	1463	2691

wyznacz (a) $f(2{,}6)$ oraz (b) $f(7{,}2)$.

24 Dla funkcji określonej w poniższej tabeli

x	–4	–2	0	2	4	6	8
$f(x)$	277	51	1	–17	–147	–533	–1319

wyznacz:

(a) $f(-3)$ oraz $f(1{,}6)$, stosując wzór Gregory'ego-Newtona z różnicami progresywnymi;

(b) $f(0{,}2)$ oraz $f(3{,}1)$, stosując wzór Gaussa z różnicami centralnymi;

(c) $f(4{,}4)$ oraz $f(7)$, stosując wzór Gregory'ego-Newtona z różnicami wstecznymi.

25 Dysponując poniższą tabelą

x	$f(x)$
–1	–2,71828
3	–0,04979
5	–0,00674

wyznacz wartość $f(3{,}4)$ metodą interpolacji Lagrange'a.

26 Dysponując poniższą tabelą

x	$f(x)$
6	0,801153
7,2	−0,82236
9	−0,73922
13	0,994808

wyznacz wartość $f(8)$ metodą interpolacji Lagrange'a.

27 Dysponując poniższą tabelą

x	$f(x)$
−2	−2,63906
0	−2,48491
5	−1,94591
6	−1,79176

wyznacz metodą interpolacji Lagrange'a wartości:

(a) $f(-0{,}8)$, (b) $f(0{,}8)$, (c) $f(5{,}5)$.