

**K.A. Stroud
Dexter J. Booth**

**MATEMATYKA
INŻYNIERSKA
POZIOM ZAAWANSOWANY**

WYDANIE VI

Z języka angielskiego przełożył

Szymon Wąsowicz

Pętla

Tytuł oryginału: Advanced Engineering Mathematics (8th Edition)

Copyright © K.A. Stroud, Dexter Booth 2020

This translation of Advanced Engineering Mathematics, 6th edition is published by arrangement with Bloomsbury Publishing Plc.

Copyright © for the translation by Pętla Sp. z o.o. 2023

Copyright © for the Polish edition by Pętla Sp. z o.o. 2023

Wszystkie prawa zastrzeżone. Kopiowanie i rozpowszechnianie całości albo fragmentów tej książki – z wyjątkiem cytatów w artykułach i przeglądach krytycznych – możliwe jest tylko na podstawie pisemnej zgody właściciela praw autorskich.

REVIEW BOARD FOR THE SIXTH EDITION:

Declan Bates, Professor of Bioengineering, School of Engineering,
University of Warwick, UK

Stewart Chidlow, Senior Lecturer in Applied Mathematics, School of Applied
Mathematics, Liverpool John Moores University, UK

Patrick Johnson, Senior Lecturer in Mathematics, Department of Engineering
and Mathematics, Sheffield Hallam University, UK

Colin Steele, Director of Service Teaching, Department of Mathematics,
University of Manchester, UK

Tłumaczenie **Szymon Wąsowicz**

Redakcja **Agnieszka Jarosz**

Oprawa graficzna i skład **Marta Dobrzyńska**

ISBN 978-83-944283-3-4

Pętla Sp. z o.o.

<http://www.stroud.edu.pl/>

www.facebook.com/matematykastroud/

info@stroud.edu.pl

tel. 508 270 779



Skrócony spis treści

<i>Przedmowa do pierwszego wydania</i>	<i>xxi</i>
<i>Przedmowa do szóstego wydania</i>	<i>xxii</i>
<i>Jak korzystać z tej książki</i>	<i>xxiv</i>
<i>Przydatne informacje</i>	<i>xxv</i>
1 Numeryczne rozwiązywanie równań i interpolacja	1
2 Transformaty Laplace'a 1	43
3 Transformaty Laplace'a 2	85
4 Transformaty Laplace'a 3	112
5 Równania różnicowe i transformata Z	140
6 Wprowadzenie do niezmienniczych układów liniowych	174
7 Szeregi Fouriera 1	213
8 Szeregi Fouriera 2	240
9 Wprowadzenie do transformat Fouriera	266
10 Rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych w postaci szeregów potęgowych 1	299
11 Rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych w postaci szeregów potęgowych 2	318
12 Rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych w postaci szeregów potęgowych 3	333
13 Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych	350
14 Algebra macierzy	383
15 Układy równań różniczkowych zwyczajnych	421
16 Pola kierunków	448
17 Analiza płaszczyzny fazowej	472
18 Układy równań nieliniowych	510
19 Układy dynamiczne	528
20 Pochodne cząstkowe	561
21 Równania różniczkowe cząstkowe	598
22 Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych cząstkowych	630
23 Całki funkcji wielu zmiennych 1	671
24 Całki funkcji wielu zmiennych 2	714
25 Funkcje określone przez całki	750
26 Analiza wektorowa 1	781
27 Analiza wektorowa 2	821
28 Analiza wektorowa 3	865
29 Analiza zespolona 1	888
30 Analiza zespolona 2	921
31 Analiza zespolona 3	961
32 Optymalizacja i programowanie liniowe	989
<i>Dodatek</i>	<i>1011</i>
<i>Odpowiedzi</i>	<i>1019</i>
<i>Indeks</i>	<i>1055</i>

Spis treści

<i>Przedmowa do pierwszego wydania</i>	<i>xxi</i>
<i>Przedmowa do szóstego wydania</i>	<i>xxii</i>
<i>Jak korzystać z tej książki</i>	<i>xxiv</i>
<i>Przydatne informacje</i>	<i>xxv</i>

Program 1 Numeryczne rozwiązywanie równań i interpolacja 1

Czego się nauczę z tego programu?	1
Wprowadzenie	2
Zasadnicze twierdzenie algebry	2
Związki między współczynnikami a pierwiastkami równania wielomianowego	4
Równania sześciennne	7
Przekształcanie równania sześciennego do postaci zredukowanej	7
Metoda Tartaglii dla pierwiastka rzeczywistego	8
Metody numeryczne	9
Metoda połowienia	9
Numeryczne rozwiązywanie równań przez iterację	11
Zastosowanie arkusza kalkulacyjnego	11
Adresy względne	13
Metoda iteracyjna Newtona-Raphsona	13
Tabelaryczne przedstawienie wyników	15
Zmodyfikowana metoda Newtona-Raphsona	19
Interpolacja	22
Interpolacja liniowa	23
Interpolacja graficzna	23
Wzór interpolacyjny Gregory'ego-Newtona z różnicami progresywnymi	24
Różnice centralne	28
Różnice wsteczne Gregory'ego-Newtona	30
Interpolacja Lagrange'a	32
Podsumowanie 1	35
Czy potrafisz? Lista kontrolna 1	37
Zadania sprawdzające 1	38
Dalsze wyzwania 1	39

Program 2 Transformaty Laplace'a 1 43

Czego się nauczę z tego programu?	43
Wprowadzenie	44
Transformaty Laplace'a	44
Różniczkowanie i całkowanie transformat	50
Twierdzenie 1: Pierwsze twierdzenie o przesunięciu	50
Twierdzenie 2: Mnożenie przez t oraz t^n	51
Twierdzenie 3: Dzielenie przez t	52
Transformaty odwrotne	56

Zasady rozkładu na ułamki proste	57
Metoda zakrywania	62
Tabela transformat odwrotnych	63
Rozwiązywanie równań różniczkowych z zastosowaniem transformat Laplace'a	64
Transformaty pochodnych	64
Rozwiązywanie równań różniczkowych pierwszego rzędu	66
Rozwiązywanie równań różniczkowych drugiego rzędu	68
Układy równań różniczkowych	74
Podsumowanie 2	79
Czy potrafisz? Lista kontrolna 2	82
Zadania sprawdzające 2	82
Dalsze wyzwania 2	83
Program 3 Transformaty Laplace'a 2	85
Czego się nauczę z tego programu?	85
Wprowadzenie	86
Funkcja skokowa Heaviside'a	86
Funkcja skokowa w zerze	87
Co daje zastosowanie funkcji skokowej?	87
Transformata Laplace'a funkcji $u(t - c)$	90
Transformata Laplace'a funkcji $u(t - c) \cdot f(t - c)$ (drugie twierdzenie o przesunięciu)	90
Równania różniczkowe zawierające funkcje skokowe	99
Splot	102
Twierdzenie o splocie	106
Podsumowanie 3	108
Czy potrafisz? Lista kontrolna 3	109
Zadania sprawdzające 3	109
Dalsze wyzwania 3	110
Program 4 Transformaty Laplace'a 3	112
Czego się nauczę z tego programu?	112
Transformaty Laplace'a funkcji okresowych	113
Funkcje okresowe	113
Transformaty odwrotne	118
Delta Diraca – impuls jednostkowy	121
Interpretacja graficzna	122
Transformata Laplace'a delty Diraca $\delta(t - a)$	123
Pochodna funkcji skokowej Heaviside'a	125
Równania różniczkowe zawierające impuls jednostkowy	126
Oscylatory harmoniczne	128
Ruch drgający tłumiony	130
Ruch harmoniczny wymuszony z tłumieniem	132
Rezonans	134
Podsumowanie 4	136
Czy potrafisz? Lista kontrolna 4	137
Zadania sprawdzające 4	138

Dalsze wyzwania 4	138
Program 5 Równania różnicowe i transformata Z	140
Czego się nauczę z tego programu?	140
Wprowadzenie	141
Ciągi	142
Równania różnicowe	142
Rozwiązanie równań różnicowych	144
Rozwiązanie przez ogląd	144
Rozwiązanie szczególne	147
Transformata Z	150
Tabela transformat Z	154
Własności transformat Z	154
Liniowość	154
Pierwsze twierdzenie o przesunięciu (przesuwanie w lewo)	155
Drugie twierdzenie o przesunięciu (przesuwanie w prawo)	156
Skalowanie	157
Twierdzenie o wartości końcowej	157
Twierdzenie o wartości początkowej	158
Pochodna transformaty	158
Transformaty odwrotne	159
Rozwiązanie równań różnicowych	162
Próbkowanie	165
Podsumowanie 5	167
Czy potrafisz? Lista kontrolna 5	169
Zadania sprawdzające 5	170
Dalsze wyzwania 5	171
Program 6 Wprowadzenie do niezmienniczych układów liniowych	174
Czego się nauczę z tego programu?	174
Liniowe układy niezmiennicze	175
Układy	175
Relacja typu wejście-odpowiedź	176
Układy liniowe	177
Niezmienniczość w czasie układu ciągłego	179
Niezmienniczość układu dyskretnego ze względu na przesunięcia	181
Równania różniczkowe	182
Ogólne równanie n -tego rzędu	182
Odpowiedź wejścia zerowego i odpowiedź stanu zerowego	183
Wejście zerowe, odpowiedź zerowa	186
Niezmienniczość w czasie	188
Odpowiedzi układu ciągłego	189
Odpowiedź impulsowa	189
Wejście dowolne	189
Splot	190
Odpowiedź wykładnicza	192

Transmitancja operatorowa $H(s)$	194
Równania różniczkowe	196
Odpowiedzi układu dyskretnego	199
Dyskretny impuls jednostkowy	199
Wejście dowolne	200
Odpowiedź wykładnicza	201
Transmitancja impulsowa	202
Równania różnicowe	203
Podsumowanie 6	206
Czy potrafisz? Lista kontrolna 6	208
Zadania sprawdzające 6	210
Dalsze wyzwania 6	210
Program 7 Szeregi Fouriera 1	
Czego się nauczę z tego programu?	213
Wprowadzenie	214
Funkcje okresowe	214
Wykresy funkcji postaci $y = A \sin nx$	214
Harmoniki	215
Funkcje okresowe, które nie są sinusoidalne	216
Wyznaczanie wzorów analitycznych funkcji okresowych	216
Całki funkcji okresowych	220
Funkcje ortogonalne	222
Szeregi Fouriera	223
Warunki Dirichleta	226
Jak harmoniki wpływają na szereg Fouriera?	231
Efekt Gibbsa	233
Suma szeregu Fouriera w punkcie nieciągłości funkcji	233
Podsumowanie 7	234
Czy potrafisz? Lista kontrolna 7	235
Zadania sprawdzające 7	236
Dalsze wyzwania 7	237
Program 8 Szeregi Fouriera 2	
Czego się nauczę z tego programu?	240
Funkcje parzyste, funkcje nieparzyste i szeregi Fouriera według cosinusów oraz według sinusów	241
Funkcje parzyste i funkcje nieparzyste	241
Iloczyny funkcji parzystych i funkcji nieparzystych	243
Szeregi Fouriera według cosinusów oraz według sinusów	250
Szeregi zawierające tylko harmoniki o numerach parzystych lub tylko harmoniki o numerach nieparzystych.	253
Interpretacja wyrazu stałego $\frac{1}{2}a_0$	255
Funkcje o okresach innych niż 2π	256
Funkcje o okresie T	256
Współczynniki Fouriera	256

Szeregi według cosinusów oraz według sinusów dla funkcji o dowolnym okresie	259
Podsumowanie 8	262
Czy potrafisz? Lista kontrolna 8	263
Zadania sprawdzające 8	264
Dalsze wyzwania 8	264
Program 9 Wprowadzenie do transformat Fouriera	266
Czego się nauczę z tego programu?	266
Zespolone szeregi Fouriera	267
Wprowadzenie	267
Zespolone funkcje wykładnicze	267
Widma sygnału	271
Dwa sposoby opisu przebiegów okresowych	272
Widma ciągłe	273
Wzór całkowy Fouriera	274
Transformaty Fouriera ważniejszych funkcji	276
Funkcje parzyste	276
Funkcje nieparzyste	277
Funkcja prostokątna	278
Delta Diraca	280
Funkcja trójkątna	281
Postaci alternatywne	282
Własności transformat Fouriera	282
Liniowość	282
Przesunięcie w czasie	283
Przesunięcie w częstotliwości	283
Skalowanie czasu	284
Symetria	284
Różniczkowanie	285
Funkcja skokowa Heaviside'a	286
Splot	287
Twierdzenie o splocie	288
Cosinusowe i sinusowe transformaty Fouriera	290
Tabela transformat	291
Podsumowanie 9	292
Czy potrafisz? Lista kontrolna 9	295
Zadania sprawdzające 9	296
Dalsze wyzwania 9	296
Program 10 Rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych w postaci szeregów potęgowych 1	299
Czego się nauczę z tego programu?	299
Pochodne wyższych rzędów	300
Wzór Leibniza – pochodna n -tego rzędu iloczynu dwóch funkcji	303
Wybór funkcji u oraz v	304

Rozwiązania w postaci szeregów potęgowych	305
Metoda Leibniza-Maclaurina	306
Równania liniowe Eulera	311
Podsumowanie 10	315
Czy potrafisz? Lista kontrolna 10	316
Zadania sprawdzające 10	316
Dalsze wyzwania 10	316
Program 11 Rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych w postaci szeregów potęgowych 2	
Czego się nauczę z tego programu?	318
Wprowadzenie	319
Rozwiązywanie równań różniczkowych metodą Frobeniusa	319
Równanie indeksowe	326
Podsumowanie 11	331
Czy potrafisz? Lista kontrolna 11	331
Zadania sprawdzające 11	332
Dalsze wyzwania 11	332
Program 12 Rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych w postaci szeregów potęgowych 3	
Czego się nauczę z tego programu?	333
Wprowadzenie	334
Równanie Bessela	334
Funkcja gamma i funkcje Bessela	335
Wykresy funkcji Bessela $J_0(x)$ oraz $J_1(x)$	339
Równanie Legendre'a	339
Wielomiany Legendre'a	340
Wzór Rodriguesa i funkcja tworząca	340
Zagadnienie Sturma-Liouville'a	342
Ortogonalność	344
Równanie Legendre'a raz jeszcze	345
Wielomiany jako kombinacje liniowe wielomianów Legendre'a	345
Podsumowanie 12	346
Czy potrafisz? Lista kontrolna 12	348
Zadania sprawdzające 12	348
Dalsze wyzwania 12	349
Program 13 Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych	
Czego się nauczę z tego programu?	350
Wprowadzenie	351
Szereg Taylora	351
Przyrost funkcji	352
Równania różniczkowe pierwszego rzędu	352
Metoda Eulera	352

Wartości dokładne i błędy	359
Interpretacja graficzna metody Eulera	362
Metoda Eulera-Cauchy'ego, czyli ulepszona metoda Eulera	364
Obliczenia metodą Eulera-Cauchy'ego	364
Metoda Rungego-Kutty	369
Równania różniczkowe drugiego rzędu	372
Metoda Eulera drugiego rzędu	372
Metoda Rungego-Kutty dla równań różniczkowych drugiego rzędu	374
Metoda predyktor-korektor	378
Podsumowanie 13	380
Czy potrafisz? Lista kontrolna 13	381
Zadania sprawdzające 13	382
Dalsze wyzwania 13	382
Program 14 Algebra macierzy	384
Czego się nauczę z tego programu?	384
Macierze osobliwe i nieosobliwe	385
Rząd macierzy	386
Operacje elementarne i macierze równoważne	387
Zgodność układu równań liniowych	390
Jednoznaczność rozwiązania	391
Rozwiązywanie układów równań liniowych	394
Metoda macierzy odwrotnej	394
Metoda przekształcania wierszy	397
Metoda eliminacji niewiadomych Gaussa	401
Metoda rozkładu na iloczyn macierzy trójkątnych (rozkładu LU)	403
Zastosowanie arkusza kalkulacyjnego	408
Porównanie metod	412
Przekształcenia układów współrzędnych	413
Obrót układu współrzędnych	414
Podsumowanie 14	416
Czy potrafisz? Lista kontrolna 14	418
Zadania sprawdzające 14	418
Dalsze wyzwania 14	419
Program 15 Układy równań różniczkowych zwyczajnych	421
Czego się nauczę z tego programu?	421
Wartości własne macierzy 2×2	422
Równania charakterystyczne	422
Suma i iloczyn wartości własnych	423
Wektory własne	423
Układy liniowych równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu	426
Identyczne wartości własne	430
Diagonalizacja macierzy	436
Macierz modalna	436
Macierz spektralna	436

Układy liniowych równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu	440
Podsumowanie 15	444
Czy potrafisz? Lista kontrolna 15	445
Zadania sprawdzające 15	446
Dalsze wyzwania 15	446
Program 16 Pola kierunków	448
Czego się nauczę z tego programu?	448
Równania różniczkowe	449
Wprowadzenie	449
Rodzina rozwiązań szczególnych	449
Pola kierunków	451
Program DFIELD	453
Wprowadzenie	453
Rozwiązanie szczególne	454
Rodzina rozwiązań szczególnych	455
Autonomiczne równania różniczkowe	456
Rozwiązania równowagi	457
Linia fazowa	459
Równania nieautonomiczne	464
Wprowadzenie	464
Podsumowanie 16	468
Czy potrafisz? Lista kontrolna 16	469
Zadania sprawdzające 16	469
Dalsze wyzwania 16	470
Program 17 Analiza płaszczyzny fazowej	472
Czego się nauczę z tego programu?	472
Analiza płaszczyzny fazowej	473
Wprowadzenie	473
Wahadło sprężynowe	473
Program PPLANE	475
Analiza płaszczyzny fazowej	478
Wartości własne a płaszczyzna fazowa	478
Urojone wartości własne	478
Zespolone wartości własne	483
Co dzieje się wokół punktu krytycznego?	486
Dwie rzeczywiste ujemne wartości własne	487
Co dzieje się wokół punktu krytycznego?	488
Dwie rzeczywiste dodatnie wartości własne	491
Dwie rzeczywiste wartości własne różnych znaków	494
Dwie identyczne wartości własne	497
Węzeł gwiazdzisty	498
Osobliwa macierz współczynników	499
Niejednorodny układ równań	500
Przesunięcie punktu krytycznego do początku układu współrzędnych	501

Podsumowanie 17	504
Czy potrafisz? Lista kontrolna 17	506
Zadania sprawdzające 17	506
Dalsze wyzwania 17	507
Program 18 Układy równań nieliniowych	510
Czego się nauczę z tego programu?	510
Układy równań różniczkowych z wieloma punktami krytycznymi	511
Wprowadzenie	511
Linearyzacja	514
Problemy z linearyzacją	521
Podsumowanie 18	525
Czy potrafisz? Lista kontrolna 18	525
Zadania sprawdzające 18	526
Dalsze wyzwania 18	526
Program 19 Układy dynamiczne	528
Czego się nauczę z tego programu?	528
Układy dynamiczne	529
Wprowadzenie	529
Zagadnienia typu drapieżnik-ofiara	529
Współzawodnictwo w pojedynczej populacji	531
Dwie populacje bez wzajemnych interakcji	532
Dwie populacje z wzajemnymi interakcjami	534
Równania różniczkowe drugiego rzędu	540
Wahadło nietłumione – małe odchylenia	540
Wahadło nietłumione – brak aproksymacji	541
Wahadło tłumione	543
Bifurkacja	546
Równania pierwszego rzędu	546
Równania drugiego rzędu	550
Cykle graniczne	551
Równanie van der Pola	553
Podsumowanie 19	555
Czy potrafisz? Lista kontrolna 19	555
Zadania sprawdzające 19	556
Dalsze wyzwania 19	556
Program 20 Pochodne cząstkowe	561
Czego się nauczę z tego programu?	561
Małe przyrosty	562
Wzór Taylora dla funkcji jednej zmiennej rzeczywistej	562
Wzór Taylora dla funkcji dwóch zmiennych rzeczywistych	562
Małe przyrosty	563
Tempo zmiany wartości funkcji	565
Funkcje uwikłane	566

Zamiana zmiennych	566
Funkcje odwrotne	570
Przypadek ogólny	572
Punkty stacjonarne funkcji dwóch zmiennych	577
Maksima i minima lokalne	578
Punkt siodłowy	583
Metoda współczynników nieoznaczonych Lagrange'a	588
Funkcje trzech zmiennych rzeczywistych	590
Podsumowanie 20	593
Czy potrafisz? Lista kontrolna 20	594
Zadania sprawdzające 20	595
Dalsze wyzwania 20	596
Program 21 Równania różniczkowe cząstkowe	
Czego się nauczę z tego programu?	598
Wprowadzenie	599
Równania różniczkowe cząstkowe	599
Rozwiązywanie przez bezpośrednie całkowanie	599
Warunki początkowe i warunki brzegowe	601
Równanie struny	602
Rozwiązanie równania struny	602
Rozwiązanie metodą rozdzielania zmiennych	602
Równanie przewodnictwa cieplnego dla jednorodnego pręta ograniczonego	610
Rozwiązanie równania przewodnictwa cieplnego	611
Równanie Laplace'a	615
Rozwiązanie równania Laplace'a	615
Równanie Laplace'a we współrzędnych biegunowych	619
Problem	620
Rozdzielenie zmiennych	620
Przypadek $n = 0$	623
Podsumowanie 21	625
Czy potrafisz? Lista kontrolna 21	626
Zadania sprawdzające 21	627
Dalsze wyzwania 21	628
Program 22 Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych cząstkowych	
Czego się nauczę z tego programu?	630
Wprowadzenie	631
Numeryczna aproksymacja pochodnych	631
Funkcje dwóch zmiennych rzeczywistych	633
Wartości w punktach siatki	634
Gwiazdy różnicowe	636
Podsumowanie metody	639
Warunki brzegowe zawierające pochodne cząstkowe	642
Równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu	646

Równania eliptyczne	646
Równania hiperboliczne	646
Równania paraboliczne	646
Pochodne cząstkowe drugiego rzędu	648
Równania zależne od czasu	651
Metoda Cranka-Nicolsona	656
Analiza wymiarowa	661
Podsumowanie 22	662
Czy potrafisz? Lista kontrolna 22	664
Zadania sprawdzające 22	665
Dalsze wyzwania 22	666
Program 23 Całki funkcji wielu zmiennych 1	671
Czego się nauczę z tego programu?	671
Wprowadzenie	672
Różniczki	678
Różniczka zupełna	680
Całkowanie różniczek zupełnych	682
Obszary ograniczone krzywymi zamkniętymi	683
Całki krzywoliniowe skierowane	687
Alternatywna postać całki krzywoliniowej skierowanej	687
Własności całek krzywoliniowych skierowanych	690
Obszary ograniczone krzywymi zamkniętymi	692
Całki krzywoliniowe skierowane wzdłuż krzywych zamkniętych	692
Całki krzywoliniowe nieskierowane	696
Krzywe określone równaniami parametrycznymi	697
Niezależność całki krzywoliniowej skierowanej od drogi całkowania	698
Różniczka zupełna funkcji trzech zmiennych	702
Twierdzenie Greena	703
Podsumowanie 23	709
Czy potrafisz? Lista kontrolna 23	711
Zadania sprawdzające 23	712
Dalsze wyzwania 23	712
Program 24 Całki funkcji wielu zmiennych 2	714
Czego się nauczę z tego programu?	714
Całki podwójne	715
Całka powierzchniowa niezorientowana	719
Układy współrzędnych w przestrzeni trójwymiarowej	724
Współrzędne kartezjańskie	724
Współrzędne walcowe	724
Współrzędne sferyczne	725
Element objętości w trzech rodzajach współrzędnych	727
Całki potrójne	728
Zamiana zmiennych w całkach wielokrotnych	735

Współrzędne krzywoliniowe	737
Zamiana zmiennych w trzech wymiarach	743
Podsumowanie 24	744
Czy potrafisz? Lista kontrolna 24	747
Zadania sprawdzające 24	747
Dalsze wyzwania 24	748
Program 25 Funkcje określone przez całki	
Czego się nauczę z tego programu?	750
Funkcje gamma oraz beta	751
Funkcja gamma	751
Funkcja beta	758
Wzory rekurencyjne	759
Związek pomiędzy funkcjami gamma i beta	761
Zastosowania funkcji gamma oraz beta	763
Wzór Legendre'a o podwajaniu	765
Funkcja błędu	766
Wykres funkcji $\operatorname{erf}(x)$	767
Uzupełniająca funkcja błędu $\operatorname{erf}(x)$	767
Funkcje eliptyczne	769
Standardowe postaci funkcji eliptycznych	769
Całki eliptyczne zupełne	770
Alternatywne postaci funkcji eliptycznych	773
Podsumowanie 25	776
Czy potrafisz? Lista kontrolna 25	777
Zadania sprawdzające 25	778
Dalsze wyzwania 25	779
Program 26 Analiza wektorowa 1	
Czego się nauczę z tego programu?	781
Wprowadzenie	782
Iloczyn potrójny	786
Iloczyn skalarny trzech wektorów (iloczyn mieszany)	786
Własności iloczynu mieszanego	787
Wektory komplanarne	788
Potrójne iloczyny wektorowe	789
Różniczkowanie wektorów	793
Różniczkowanie sum i iloczynów wektorów	796
Jednostkowy wektory styczny	797
Pochodne cząstkowe funkcji wektorowej	799
Całkowanie funkcji wektorowych	800
Pola skalarne i wektorowe	801
Gradient funkcji skalarnej	802
Pochodne kierunkowe	804
Jednostkowy wektory normalny	807
Gradyenty sumy i iloczynu funkcji skalarnych	808

Dywergencja funkcji wektorowej	810
Rotacja funkcji wektorowej	810
Podsumowanie wiadomości o gradiencie, dywergencji i rotacji	812
Złożenia operatorów gradientu, dywergencji i rotacji	813
Podsumowanie 26	815
Czy potrafisz? Lista kontrolna 26	817
Zadania sprawdzające 26	818
Dalsze wyzwania 26	819

Program 27 Analiza wektorowa 2 821

Czego się nauczę z tego programu?	821
Całki krzywoliniowe	822
Pole skalarne	822
Pole wektorowe	824
Całki potrójne	828
Całki powierzchniowe	832
Pole skalarne	832
Pole wektorowe	835
Zachowawcze pola wektorowe	839
Wzór Gaussa-Ostrogradskiego	843
Wzór Stokesa	849
Zwrot jednostkowego wektora normalnego do powierzchni S a obieg na ograniczającej ją krzywej c	851
Twierdzenie Greena	856
Podsumowanie 27	859
Czy potrafisz? Lista kontrolna 27	861
Zadania sprawdzające 27	862
Dalsze wyzwania 27	862

Program 28 Analiza wektorowa 3 865

Czego się nauczę z tego programu?	865
Współrzędne krzywoliniowe	866
Ortogonalne współrzędne krzywoliniowe	869
Ortogonalne układy współrzędnych w przestrzeni	870
Współczynniki skali	873
Współczynniki skali dla współrzędnych kartezyjskich, walcowych i sferycznych	874
Dowolne układy współrzędnych krzywoliniowych (u, v, w)	876
Równania przejścia	877
Element łuku ds oraz element objętości dV w układzie ortogonalnych współrzędnych krzywoliniowych	877
Gradient, dywergencja, rotacja i laplasjan w układzie ortogonalnych współrzędnych krzywoliniowych	878
Gradient, dywergencja i laplasjan we współrzędnych kartezyjskich, walcowych i sferycznych	881

Podsumowanie 28	883
Czy potrafisz? Lista kontrolna 28	885
Zadania sprawdzające 28	886
Dalsze wyzwania 28	886
Program 29 Analiza zespolona 1	888
Czego się nauczę z tego programu?	888
Funkcje zmiennej zespolonej	889
Odwzorowanie zespolone	890
Wyznaczanie obrazu linii prostej leżącej na płaszczyźnie	
w odwzorowaniu $w = f(z)$	891
Typy odwzorowań postaci $w = az + b$	895
Odwzorowania nieliniowe	902
Wyznaczanie obrazów obszarów	906
Podsumowanie 29	917
Czy potrafisz? Lista kontrolna 29	918
Zadania sprawdzające 29	918
Dalsze wyzwania 29	919
Program 30 Analiza zespolona 2	921
Czego się nauczę z tego programu?	921
Różniczkowanie funkcji zmiennej zespolonej	922
Funkcja analityczna	923
Równania Cauchy'ego-Riemanna	925
Funkcje harmoniczne	926
Całkowanie funkcji zespolonych	930
Całki po konturach, czyli całki krzywoliniowe na płaszczyźnie z	930
Twierdzenie Cauchy'ego	933
Deformacja konturu w punkcie osobliwym	937
Odwzorowania konforemne	943
Warunki konforemności odwzorowania	944
Punkty krytyczne	944
Odwzorowanie Schwarza-Christoffela	947
Wielokąty otwarte	951
Podsumowanie 30	956
Czy potrafisz? Lista kontrolna 30	958
Zadania sprawdzające 30	959
Dalsze wyzwania 30	959
Program 31 Analiza zespolona 3	961
Czego się nauczę z tego programu?	961
Szeregi Maclaurina	962
Promień zbieżności	965
Punkty osobliwe	966
Bieguny	966

Punkty pozornie osobliwe	967
Koło zbieżności	967
Szereg Taylora	968
Szereg Laurenta	969
Residua	973
Obliczanie residuów	975
Całki funkcji rzeczywistych	976
Całki postaci $\int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$	977
Całki postaci $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx$	978
Całki postaci $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \begin{cases} \sin x \\ \cos x \end{cases} dx$	980
Podsumowanie 31	982
Czy potrafisz? Lista kontrolna 31	985
Zadania sprawdzające 31	986
Dalsze wyzwania 31	987
Program 32 Optymalizacja i programowanie liniowe	989
Czego się nauczę z tego programu?	989
Optymalizacja	990
Programowanie liniowe (optymalizacja liniowa)	990
Nierówności liniowe	990
Graficzna reprezentacja nierówności liniowych	991
Solver	996
Parametry Solvera	997
Zastosowania	1001
Programowanie nieliniowe	1003
Podsumowanie 32	1005
Czy potrafisz? Lista kontrolna 32	1006
Zadania sprawdzające 32	1006
Dalsze wyzwania 32	1007
<i>Dodatek</i>	1011
<i>Odpowiedzi</i>	1019
<i>Indeks</i>	1055

